

Thèse

présentée devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD DE LYON

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Denis JEANDEL

METHODE DE CALCUL DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE
utilisant une équation de comportement du coefficient de Boussinesq

Soutenue le 4 Juillet 1972 devant la Commission d'Examen

M. J. MATHIEU

Président

M. E.A. EICHELBRENNER

M. L.S.G. KOVASZNAY

M^{lle} G. COMTE - BELLOT

}

Examineurs

M. J. PERRIER

M. R. MICHEL

}

Invités



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552613_0028

Thèse

présentée devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD DE LYON

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Denis JEANDEL

METHODE DE CALCUL DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE

utilisant une équation de comportement du coefficient de Boussinesq

Soutenue le 4 Juillet 1972 devant la Commission d'Examen

M. J. MATHIEU

Président

M. E.A. EICHELBRENNER

M. L.S.G. KOVASZNAY

M^{lle} G. COMTE-BELLOT

} Examineurs

M. J. PERRIER

M. R. MICHEL

} Invités

UNIVERSITE CLAUDE-BERNARD

LYON

Président : M. le Professeur J. BOIDIN
1er Vice-Président : M. R. TOURAINE, Maître de Conférences agrégé
2ème Vice-Président : M. P. PONCET, Maître-Assistant
3ème Vice-Président : M. D. SETTELEN, Etudiant.

UNITES D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE

UNITES

DIRECTEURS

U.E.R. médicale Grange-Blanche	M. le Professeur D. GERMAIN
U.E.R. médicale Alexis-Carrel	M. le Professeur C. CIROD
U.E.R. médicale LYON-Nord	M. le Professeur A. BERTOYE
U.E.R. médicale LYON-Sud-Ouest	M. le Professeur L. TOLOT
U.E.R. des Sciences pharmaceutiques	M. M. CARRAZ, Maître de Conférences agrégé
U.E.R. des Techniques de Réadaptation	M. le Professeur P. MOUNIER-KUHN
U.E.R. de Biologie humaine	M. JC. CZYBA, Maître de Conférences agrégé
U.E.R. d'Education Physique et Sportive	M. A. MILLON, Professeur E.P.S.
U.E.R. des Sciences Odontologiques	M. R. VINCENT
U.E.R. de Mathématiques	M. le Doyen J. BRACONNIER
U.E.R. de Physique	M. le Professeur M. DUFAY
U.E.R. de Chimie et Biochimie	Mle le Professeur D. GAUTHERON
U.E.R. des Sciences de la Nature	M. le Professeur L. DAVID
U.E.R. de Biodynamique et Psychopédagogie	M. le Professeur R. FONTANGES
U.E.R. de Physique nucléaire	M. le Professeur A. SARAZIN
U.E.R. de Mécanique	M. le Professeur J. MATHIEU
Observatoire	M. le Professeur J.H. BIGAY
Institut Universitaire de Technologie 1	M. le Professeur B. POUYET
Institut Universitaire de Technologie 2	M. J. GALLET

Secrétaire Général : M. P. IZAUTE

Cette étude a été effectuée au Laboratoire de mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Lyon.

J'adresse l'expression de ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur MATHIEU, Directeur du Laboratoire.

Il m'a offert les meilleures chances de progrès par les encouragements et les conseils sûrs qu'il m'a prodigués.

Ma gratitude s'adresse également à Mademoiselle G. COMTE - BELLOT, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, qui a bien voulu me consacrer une part de son temps pour me guider avec un souci constant de rigueur et de précision.

Je tiens à remercier Monsieur L.S.G. KOVASZNAY, Professeur à l'Université de Johns Hopkins, qui a bien voulu me faire l'honneur de juger ce modeste travail.

Il m'est également très agréable d'adresser mes vifs remerciements à Monsieur E.A. EICHELBRENNER, Professeur à titre personnel, détaché au Canada, pour sa participation spontanée à cette soutenance.

Je ne manquerai pas de souligner l'accueil bienveillant de Monsieur PERRIER, Chef du Service Aérodynamique Théorique à la Société des Avions Marcel Dassault.

L'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail a constitué pour moi un solide encouragement.

Je remercie également Monsieur MICHEL, Chef de Division de Recherche à l'O.N.E.R.A., d'avoir bien voulu me faire l'honneur de sa présence dans ce Jury.

Je prie Monsieur P. COMPARAT, Directeur de l'Ecole Centrale de Lyon de croire à l'expression de mes remerciements pour les facilités de travail qu'il m'a accordées.

J'ai également ici le plaisir de souligner le dévouement de Monsieur G. CHARNAY, pour les apports expérimentaux très fiables qu'il m'a communiqués, et celui de Monsieur E. ALCARAZ, pour les charges qu'il a bien voulu assurer afin de me libérer au maximum de ma tâche d'Assistant de Faculté.

Je suis également redevable au groupe turbomachines du Laboratoire et en particulier à Messieurs SPETTEL et GAY, d'une aide efficace et amicale.

Que chacun de ses membres trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

J'adresse enfin mes remerciements à Monsieur et Madame MADDALENA du Centre de Calcul de la Faculté de Sciences de Lyon et à Madame PERRIER de l'Administration de l'Ecole Centrale qui m'ont prêté aimablement leurs concours dans la réalisation du présent mémoire.

* * * * *

A mon épouse Pascale, un témoignage d'affection et de reconnaissance pour sa confiance et son aide technique efficace de chaque instant.

SOMMAIRE

L'ensemble des résultats ici présentés porte sur le développement des couches limites bidimensionnelles sur paroi plane.

La méthode différentielle exposée utilise outre des données valables près de la paroi, l'équation de quantité de mouvement relative au mouvement moyen où les contraintes tangentielles sont prises sous la forme proposée par Boussinesq, et une équation de comportement du coefficient de viscosité du type de celle établie par Nee et Kovasznay.

Des couches limites soumises à des gradients de pression positifs ou négatifs ont été convenablement traitées. La méthode a en outre été appliquée à des écoulements possédant à l'extérieur de la couche certaines propriétés de diffusion globalement prises en charge par une loi de répartition de la viscosité turbulente ν_e à la frontière extérieure. L'effet d'un sillage et d'un phénomène thermique destabilisant a également été abordé dans cette étude des couches limites perturbées.

Le processus d'intégration présenté par S.V. Patankar et D.B. Spalding a été retenu dans le but de résoudre le système d'équations différentielles construit. L'aspect essentiel du procédé de calcul pas à pas, réside dans le choix d'une grille qui ajuste son écartement de façon à s'adapter à l'épaisseur croissante de la couche limite.

TABLE DES MATIERES

Introduction

Chapître I - Evolution de la viscosité effective turbulente - Hypothèse de Nee et Kovasznay.

I - 1 La viscosité turbulente liée directement au phénomène de transport turbulent :

I - 2 Formulation des termes "production" et "dissipation" :

I-2-1 - Terme "production"

I-2-2 - Terme "dissipation"

I -2-3 - Liaisons entre les coefficients numériques

I - 3 Les effets du bord libre :

I - 4 Extension aux couches limites stratifiées :

Chapître II - Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles de la couche limite.

II - 1 Formulation générale :

II-1-1 - Les équations de base

II-1-2 - Le système de coordonnées

II-1-3 - Forme commune des équations

II-1-4 - Les approximations à la frontière pariétale

II - 2 Les équations sous forme de différences finies :

- II-2-1 - Les approximations essentielles
- II-2-2 - Expression des différents termes de l'équation commune
- II-2-3 - Relations linéaires au voisinage des frontières
- II-2-4 - Solution générale de l'équation
- II-2-5 - Contrôle de la grille
- II-2-6 - Calcul de la distance transversale x_2
- II-2-7 - Déroulement du calcul

Chapître III - Résultats et confrontations expérimentales

III - 1 Valeurs numériques des coefficients :

III - 2 Couche limite se développant en présence d'un gradient de pression extérieur :

- III-2-1 - Zone de paroi
- III-2-2 - Zone externe

III - 3 Couche limite se développant en présence d'un champ extérieur turbulent :

- III-3-1 - Conditions aux limites et conditions initiales
- III-3-2 - Confrontations préliminaires
- III-3-3 - Discussion

III - 4 Couche limite se développant en présence d'un sillage :

III - 5 Couche limite destabilisée par chauffage :

Conclusion

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

=====

Symboles généraux :

x_i : axes

x_1 : direction principale de l'écoulement

δ : épaisseur de la couche limite turbulente comptée à partir de la paroi

U_i : composante de la vitesse moyenne suivant l'axe x_i

Ω_i : composante du tourbillon moyen

U_1^∞ : vitesse moyenne de l'écoulement extérieur à la couche

U_f : vitesse de frottement

u_i : composante de la vitesse fluctuante

C_f : coefficient de frottement pariétal

μ : coefficient de viscosité dynamique

ν : coefficient de viscosité cinématique

ν_T : coefficient de Boussinesq

ν_e : viscosité effective turbulente ($\nu_T + \nu$)

D_F : diffusivité d'une quantité scalaire F

τ : contrainte tangentielle

h : distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse moyenne atteint la vitesse U_1^∞ extérieure à la couche,

τ_0 : contrainte tangentielle pariétale

δ_1 : épaisseur de déplacement $\int_0^\delta \frac{U_1^\infty - U_1}{U_1^\infty} dx_2$

δ_2 : épaisseur de quantité de mouvement $\int_0^\delta \frac{U_1}{U_1^\infty} \left(1 - \frac{U_1}{U_1^\infty}\right) dx_2$

δ_3 : épaisseur d'énergie $\int_0^\delta \frac{U_1}{U_1^\infty} \left[1 - \left(\frac{U_1}{U_1^\infty}\right)^2\right] dx_2$

H_{12} : paramètre de forme δ_1 / δ_2

H_{32} : autre paramètre de forme δ_3 / δ_2

ρ : masse volumique du fluide

l : longueur de mélange de Prandtl

A : coefficient intervenant dans l'équation relative à ν_e

B : " " " " " " "

A_ε : " " " " " " "

L_d : longueur caractéristique de la dissipation

K : constante de Karman

Symboles utilisés dans la méthode de résolution :

Ψ : fonction de courant

$\omega(i)$: fonction de courant sans dimension, variable transversale

m_E : taux de transfert de masse à travers la frontière extérieure

$x_2(i)$: distance à la paroi de chaque ligne de grille

ϕ : fonction qui s'identifie selon le cas à u_1 ou à v_e

A_ϕ : coefficients dans l'équation linéaire en ϕ

B_ϕ : " " " " " "

C_ϕ : " " " " " "

g_1, g_2, g_3, g_4 : coefficient du terme "convection" sous forme linéaire

g_5, g_6 : coefficients du terme "diffusion"

s_1, s_2, s_3, s_4 : coefficients du terme "source"

β : exposant du profil de vitesse au voisinage de la paroi

γ : " " de viscosité " "

Indices :

E : frontière extérieure de la couche

I : " intérieure " "

xu : ligne amont sur laquelle les valeurs des fonctions ϕ_i sont connues

xD : ligne aval sur laquelle les valeurs des fonctions ϕ_i sont à déterminer

$\omega_{i+1/2}$: ligne médiane $\omega = C^{te}$ équidistante des lignes ω_{i+1} et ω_i

$\omega_{i-1/2}$: " " " " " " ω_{i-1} et ω_i

Introduction

Le congrès de Stanford (1968) présente une gamme très étendue de méthodes de résolution des couches limites turbulentes ; cependant, les exigences aéronautiques nouvelles nécessitent d'atteindre par le calcul d'autres écoulements usuels (jets, sillages, zones de mélange, interactions couches limites-sillage). Il s'avère alors indispensable de prendre plus correctement en compte le mécanisme d'évolution des phénomènes turbulents.

Le bref rappel des schémas actuels de traitement des couches limites est ici destiné à percevoir les éventuelles extensions de ces procédés et les paramètres supplémentaires à choisir en fonction des problèmes posés.

Méthodes de calcul des couches limites turbulentes :

I - Les méthodes intégrales :

Les méthodes intégrales ont été développées dans le but d'obtenir, avec des moyens numériques modestes, les paramètres globaux caractéristiques des couches limites laminares ou turbulentes.

En écoulement turbulent, l'équation de quantité de mouvement intégrée dans la direction transversale x_2 de $x_2 = 0$ à $x_2 \rightarrow \infty$ s'écrit sous la forme :

$$(1) \quad \frac{d}{dx_1} \left[U_1^\infty \delta_2 \right] + \delta_1 U_1^\infty \frac{dU_1^\infty}{dx_1} = - \left[\frac{\tau}{\rho} \right]_{x_2=0}$$

dans laquelle les contraintes tangentielles n'interviennent que par la valeur locale à la paroi $\left[\frac{\tau}{\rho} \right]_{x_2=0}$

Une équation d'énergie est également construite sous la forme

$$(2) \quad \frac{d}{dx_1} \left[\frac{U_1^3 \delta_3}{2} \right] = \int_0^h \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 = \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D}$ représente un bilan global de production turbulente à travers la couche limite.

L'introduction de la relation de Ludwig et Tillmann

$$(3) \quad C_f = 0.246 Re_{\delta_2}^{-0.268} 10^{-0.678 H_{12}}$$

et d'une liaison entre $\mathcal{D}$ et l'écoulement moyen du type proposé par Truckenbrodt :

$$(4) \quad \mathcal{D} \approx h U_1^3 / \left[U_1^{\infty} \delta_2 / \nu \right]^{1/6}$$

conduit à un système différentiel ordinaire qui donne avec l'évolution des quantités intégrales $\delta_1(x_1)$ et $\delta_2(x_1)$ celle de $C_f(x_1)$. Le rôle de la turbulence sous-jacente n'apparaît pas explicitement

Ces méthodes d'une mise en oeuvre rapide généralement associées à des critères de décollement portant sur l'évolution de H_{12} ou δ_2 tels que le critère de Buri, sont très commodément applicables à l'optimisation de l'écoulement à travers les grilles d'aubes (Janigro - 1967) ou à la détermination de convergents courts (Gay et alii - 1971).

Cependant, dans les configurations d'écoulements plus complexes que l'on rencontre par exemple dans les grilles en tandem, les couches limites se développant sur les aubes de la seconde grille sont considérablement affectées par les sillages issus de la première et les relations (3) et (4) ne peuvent pas traduire correctement l'évolution de l'écoulement moyen.

(*) Voir notations pour la définition de h .

(**) Schlichting H. Boundary layer Theory Chap. XXII, Fourth edition Mc Graw Hill, New-York (1960).

II - Les méthodes différentielles :

Les méthodes intégrales fondées sur des hypothèses nécessairement très globales ne permettent pas de suivre le détail du phénomène turbulent ; de ce fait, elles sont mal adaptées à d'éventuels réajustements. Or, actuellement les cas abordés devenant de plus en plus difficiles à analyser, on ne voit guère comment perfectionner ce type d'approche en fonction des problèmes nouveaux.

Les méthodes différentielles semblent donc souhaitables. Outre l'équation de continuité, elles utilisent pour un fluide "incompressible" (*), l'équation de conservation de la quantité de mouvement simplifiée :

$$(5) \quad u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = u_1^\infty \frac{\partial u_1^\infty}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[-\overline{u_1 u_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]$$

et se différencient essentiellement dans la manière de traiter la contrainte tangentielle $\mathcal{C} = -\rho \overline{u_1 u_2}$.

Les premières tentatives s'appuient tout naturellement sur certains travaux conduits dans le cas des couches limites laminaires tandis que dans les méthodes récentes, on s'attache à rechercher, par l'intermédiaire d'équations de transport approchées, les modèles susceptibles de traduire les processus fondamentaux responsables de la dynamique de la turbulence.

II - 1 Emploi d'un coefficient de viscosité turbulente ν_T :

Boussinesq tente d'apporter à ce problème nécessairement "ouvert" du fait de la non-linéarité des équations de départ, une solution simple en posant :

$$(6) \quad -\overline{u_1 u_2} = \nu_T \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Parmi les auteurs qui utilisent actuellement ce concept de viscosité turbulente, on remarquera par exemple la proposition récente de Mellor et Herring (1968) qui lie directement $\nu_e = \nu_T + \nu$ à

(*) Le qualificatif "incompressible" est impropre mais son emploi est habituel lorsqu'on veut désigner un fluide à propriétés physiques constantes.

l'écoulement moyen, et définissent une zone voisine de la paroi pour

laquelle : $\frac{\nu_e}{\nu} = \varphi(X)$ avec $X \propto \frac{x_2 u_f}{\nu}$

et une zone externe pour laquelle : $\frac{\nu_e}{u_1 \delta_1} = \phi(X)$ avec $X \propto \frac{x_2 u_f}{u_1 \delta_1}$ (*)

Cependant, l'introduction d'une viscosité effective turbulente fait l'objet de critiques sérieuses comme du reste toute tentative qui lie localement le tenseur des contraintes T_{ij} à celui des déformations : $D_{k,i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]$. En effet, dans le cas des écoulements laminaires, la contrainte tangentielle τ/ρ est simplement associée au gradient de vitesse par un coefficient $\nu = \mu/\rho$ qui ne reflète que les propriétés physiques du fluide concerné, par contre dans le cas des écoulements turbulents, cette liaison fait apparaître un coefficient de proportionnalité ν_e qui n'est plus alors propre au fluide mais qui est davantage en rapport avec des caractéristiques plus ou moins globales de l'écoulement.

De plus, comme le remarque pour la première fois J. MATHIEU (1959), toute formulation de la contrainte par l'intermédiaire du coefficient de Boussinesq est en défaut dans un jet pariétal ; cette contrainte étant différente de zéro en un point où la vitesse est maximale.

Les difficultés soulevées par l'introduction du concept de viscosité turbulente de Boussinesq sont certes fondamentales, mais on observe cependant que les résultats obtenus sont, dans bien des cas, acceptables. Le concept de longueur de mélange de Prandtl n'est pas sans donner matière à observations et nous en ferons tout d'abord très brièvement une étude critique.

II - 2 Emploi de la longueur de mélange de Prandtl :

Cette notion étant dans un premier temps postulée, la contrainte tangentielle s'écrit :

(*) Mellor Herring, AFOSR IFP Stanford Conference, Vol. I p. 331-435 (1968).

$$-\overline{u_1 u_2} = l^2 \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (*)$$

où l s'exprime en fonction de la distance de la paroi,

Spalding (1967) propose par exemple une évolution trans-
versale de "l" sous la forme :

$$\begin{aligned} l &= k x_2 \text{ pour } 0 < x_2 < 0.2 \delta \text{ avec } k = 0,435 \\ l &= \lambda \delta \text{ pour } 0.2 \delta < x_2 < 1 \text{ avec } \lambda = 0,09 \end{aligned}$$

alors que Michel (1969) présente la relation :

$$l/\delta = 0.085 \operatorname{th} \left\{ (0,41/0,085) (x_2/\delta) \right\}$$

On sait que Prandtl définit "l" comme une distance moyenne le long de laquelle une propriété " ϕ " caractéristique d'un ensemble de particules fluides est conservée. En première approximation, la quantité de mouvement est, pour Prandtl une propriété transférable, ce qui ne manque pas de poser quelques problèmes notamment sur le rôle des forces de pression, ces problèmes n'ont pas échappé à Taylor (1932) qui propose peu après un modèle analogue mais portant sur le tourbillon. Sans entrer dans le détail des insuffisances d'un modèle purement inspiré de la théorie cinétique des gaz, nous pouvons au moins constater qu'il associe tout phénomène de diffusion à un gradient de vitesses, ce qui est évidemment erroné ; on sait en effet comment le champ turbulent sensiblement homogène et isotrope créé par une grille, peut engendrer la diffusion.

Il n'en reste pas moins qu'en dépit de ces indigences, les méthodes fondées sur cette notion permettent de résoudre une gamme relativement large d'écoulements dans lesquels l'influence du gradient de

(*) On remarquera l'amélioration que Prandtl propose lui-même sous la forme :

$$\nu_e = l^2 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + l^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Elle ne constitue en fait qu'un perfectionnement modeste, l'idée de faire intervenir la courbure du profil moyen rendant si l'on peut dire moins locale la définition de ν_e .

vitesse moyenne est prépondérante. Il faut aussi ajouter que le caractère géométrique de ce paramètre ne le rend guère dépendant que de données également géométriques de l'écoulement, telle la distance à la paroi et l'épaisseur de la couche limite ; sur cette géométrie élémentaire, la compressibilité joue peu de rôle et on comprend ainsi pourquoi les méthodes mises au point sont encore utilisables pour les écoulements compressibles.

II - 3 Méthodes utilisant des équations de transport :

L'élimination du caractère local des méthodes précédemment citées semble être actuellement l'objectif essentiel à atteindre.

Dans cette voie, on peut tenter notamment de lier le champ moyen au champ turbulent par l'intermédiaire d'échelles caractéristiques de longueur et de temps ; Tennekes et Lumley (1972) examinent complètement cette approche, la diffusion dépend essentiellement de la valeur efficace de la composante fluctuante u_2' et du temps intégral lagrangien Θ_L . La définition de ν_T sous la forme :

$$\nu_T = u_2'^2 \Theta_L$$

est ainsi relativement riche en informations et affranchie de tout gradient local. On peut aussi approximativement écrire :

$$\nu_T \simeq u_2' L$$

où L est une longueur de corrélation transversale, car Θ_L est de l'ordre de L/u_2' .

L'approche de Phillips (1967), qui consiste à relier la dérivée première de la tension de Reynolds à la dérivée seconde du profil de vitesses moyennes :

$$\frac{\partial \overline{u_1 u_2}}{\partial x_2} \sim A u_2'^2 \Theta_E \frac{\partial^2 \overline{u_1}}{\partial x_2^2} \quad (A \sim 0.4)$$

relève également du même souci. La mémoire de la turbulence intervient explicitement puisque Θ_E est le temps intégral lié à la corrélation tempo-

relle des composantes transversales de vitesse suivies dans leur mouvement de convection moyen.

Sous une forme différente, la théorie de Nee et Kovasznay rend compte plus ou moins intuitivement des processus fondamentaux responsables de l'évolution de la turbulence. Si cette méthode reste traditionnelle du fait qu'elle conserve le concept de viscosité turbulente, elle utilise une approche qui la relie directement aux méthodes où l'évolution de la turbulence est suivie tout au long de son cheminement.

Bradshaw, Ferris et Atwell (1967) considèrent en fait l'équation qui règle (entre convection, diffusion, production et dissipation), l'équilibre dynamique de l'énergie cinétique turbulente ; puis postulent l'existence d'une couche limite en état d'équilibre turbulent ce qui leur permet d'admettre que le rapport $\mathcal{E}/\rho \bar{q}^2 = C^k$. L'équation qui contrôle l'évolution de $\bar{q}^2$ contrôle alors celle de $\mathcal{E}$. Reste à préciser ce que sont les termes "diffusion" et "dissipation". Pour ce faire, Bradshaw, Ferris et Atwell utilisent des résultats expérimentaux ajustant les valeurs des différentes fonctions et constantes à des données tirées d'écoulements correspondant à des régimes d'équilibre.

Des échelles de longueur caractéristiques de la turbulence apparaissent aussi dans les considérations qui précèdent et certains auteurs ont cherché à faire intervenir également des équations de transport de ces échelles : Rotta (1971), Spalding (1970), Launder (1972).

Une équation d'évolution des tensions de Reynolds elles-mêmes a été également considérée par Hanjalic et Launder (1972). D'autres méthodes plus ambitieuses ont encore été proposées (J. Daly et F.H. Harlow 1972). Elles font appel à une équation supplémentaire qui exprime l'évolution de l'énergie dissipée $\mathcal{E}$. De nombreuses approximations interviennent alors, par exemple, dans l'expression du tenseur des

corrélations triples en fonction de celui des corrélations doubles. L'ajustement des coefficients numériques est évidemment toujours un problème délicat.

Devant la complexité croissante de ces méthodes, nous avons préféré la voie proposée par Nee et Kovasznay. Outre les avantages mentionnés précédemment, l'équation de comportement de ν_e se prête, sans difficultés fondamentales, à un processus d'intégration par différences finies, et peut également prendre en compte la présence d'une turbulence extérieure à l'écoulement étudié. Certes, cette prise en charge demeure globale et une étude de la restructuration de la turbulence par l'écoulement moyen sera probablement à considérer ultérieurement (Mathieu 1971).

Chapître I - Evolution de la viscosité effective turbulente,
Hypothèse de Nee et Kovasznay.

Le mécanisme d'évolution de la viscosité turbulente proposé par Nee et Kovasznay semble susceptible de traduire de façon correcte l'évolution d'écoulements complexes tout en ne faisant appel qu'à des considérations élémentaires sur le phénomène de transfert de la turbulence.

Cette méthode peut être appliquée à des écoulements possédant à l'extérieur de la couche certaines propriétés de diffusion globalement prises en charge par la loi de répartition de ν_e sur la frontière ($\nu_e = \nu_T + \nu$). Elle a en outre l'avantage de prêter au coefficient ν_e une certaine mémoire sans modifier profondément le procédé de calcul choisi.

Une seule équation nouvelle est ajoutée aux équations habituelles du mouvement moyen, elle régit précisément l'évolution de la viscosité turbulente. Dans le procédé initial, deux constantes seulement doivent être ajustées aux données expérimentales.

I - 1 - La viscosité turbulente liée directement au phénomène de transport turbulent :

On connaît les équations auxquelles obéissent par exemple la température T , la composante scalaire Ω_3 du rotationnel dans un champ d'écoulement plan laminaire. Elles associent un double phénomène de convection et de diffusion. Les quantités sur lesquelles agissent les opérateurs concernés n'intervenant pas dans l'expression de ces opérateurs, la linéarité du problème est sauvegardée. C'est ainsi que les phénomènes thermiques répondent à l'équation :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}$$

et que l'unique composante Ω_3 du vecteur tourbillon vérifie :

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_2^2} \right\}$$

Les coefficients de diffusivité thermique $\lambda/\rho c_p$ et cinématique $\nu = \mu/\rho$ qui prennent en charge l'importance relative de la diffusion sont ici des caractéristiques physiques du milieu. Leur échelle de définition est celle de la molécule alors que les équations cherchent à définir une évolution macroscopique.

On pourrait tenter une extrapolation de ce genre de formulation au cas turbulent. L'action du mouvement d'agitation sur la diffusion de F est alors prise en charge par un coefficient D_F supposé fonction du point et l'on écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ D_F \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\}$$

Si la turbulence agit sur la distribution F , il faut bien noter qu'il est encore admis que F n'affecte pas le champ de vitesses, une situation de ce type correspondrait par exemple au cas d'écoulements faiblement chauffés.

Le problème est cependant déjà très sensiblement différent car alors l'échelle de définition du coefficient D_F est celle de la turbulence elle-même, laquelle n'est pas petite vis-à-vis du domaine dans lequel la fonction $F(t, x_i)$ est à étudier. On sait en effet, que la longueur de corrélation transversale $L_{i,j}(0, x_2, 0)$ dans une couche limite plane est tout à fait comparable à $\delta(x_1)$.

La non linéarité fondamentale des problèmes de mécanique des fluides nous a habitués très vite à une forme d'interaction déjà bien mise en évidence dans l'équation d'Helmholtz qui s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \Omega_i}_{\text{I}} + \underbrace{u_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j}}_{\text{II}} = \frac{\Omega_j}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_j^2}}_{\text{I}}$$

Outre le phénomène de diffusion-convection (termes I et II) déjà rencontré, apparaît cette fois un terme $\frac{\Omega_j}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ traduisant l'interaction entre le champ de vitesse et son propre rotationnel. Le phénomène mis ici en valeur pour tout écoulement tridimensionnel est en fait un mécanisme d'allongement des lignes "tourbillon". Ce type d'interaction est fondamental en turbulence où le champ moyen et le champ fluctuant combinent leurs effets pour provoquer cet étirement. Lorsque le champ moyen est plan, c'est alors le champ turbulent qui, agissant seul sur ses propres lignes "tourbillon", les étire en moyenne, accroissant par ce mécanisme, le niveau même d'agitation. L'intervention d'un processus de dissipation conduit à un état d'équilibre constaté par l'ensemble de mesures effectuées dans diverses configurations d'écoulements.

Du fait de sa relative complexité, nous n'évoquerons pas l'équation qui régit l'intensité du tourbillon fluctuant ; par ailleurs, il semble très délicat de traiter globalement le problème en abordant d'emblée à travers les termes $\overline{u_i u_j}$, l'histoire des contraintes qui règlent le mouvement moyen. En conséquence, nous pensons qu'un rappel de l'équation d'énergie est une meilleure introduction à l'équation de Nee et Kovasznay. On sait que l'on a (Townsend 1956) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}^2/2 &= - \underbrace{u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{q}^2/2}_{\text{II}} - \underbrace{\overline{u_i u_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\text{III}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k q^2/2})}_{\text{IV}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho u_i})}_{\text{V}} + \underbrace{D \overline{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}}_{\text{VI}} \end{aligned}$$

avec :

- I : taux de variation temporelle de $\bar{q}^2/2$.
- II : transfert dû à la convection de $\bar{q}^2/2$ par la vitesse moyenne.
- III : production due à l'interaction entre le mouvement moyen et le mouvement d'agitation (ce même terme apparaît dans l'équation de l'énergie cinétique du mouvement moyen comme un terme de pertes).
- IV : transfert dû à la convection par les fluctuations de vitesse.

- V : transfert dû aux gradients des fluctuations de pression.
- VI : se décompose en un transfert d'énergie cinétique par la viscosité et en une dissipation de l'énergie cinétique en chaleur par la viscosité.

En écoulement permanent (terme I nul), l'équation simplifiée dans le cas bidimensionnel s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{u_1 \frac{\partial \bar{q}^2}{\partial x_1}}_{\text{II}} + u_2 \frac{\partial \bar{q}^2}{\partial x_2} \right\} - \underbrace{\overline{u_1 u_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}}_{\text{III}} \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_2 \left(\frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \right]}_{\substack{\text{IV} \\ \text{"diffusion"}}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{VI}} = 0
 \end{aligned}$$

Les termes de convection et de production ne posent alors aucun problème d'évaluation, déjà celui qui est relatif à la dissipation oblige à définir une échelle de longueur, mais le calcul du terme "diffusion" reste le plus délicat. Cette situation provient de la difficulté de traduire convenablement, à partir des données statistiques du champ, une promenade aléatoire de la particule, l'aspect lagrangien du problème réapparaissant en filigrane, Bradshaw apporte une solution en introduisant une fonction spécifique de la diffusion dans l'écoulement considéré, cependant que Nee et Kovasznay portent tout leur intérêt sur le coefficient de diffusion ν_e lui-même. La difficulté évoquée s'estompe alors, car la fonction ν_e qui caractérise au sens large les possibilités de diffusion du champ turbulent contrôle ce processus à l'intérieur même de l'équation qui la régit.

Nous admettrons donc dans un premier temps que l'équation de comportement de ν_e répond au schéma classique proposé par Nee et Kovasznay (1968) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_1 \frac{\partial \nu_e}{\partial x_1} & + & u_2 \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} & = & \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \nu_e \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \right\} & + & A(\nu_e - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{B \nu_e (\nu_e - \nu)}{L_d^2} \\
 \text{convection} & & & & \text{diffusion} & & \text{production} \quad \text{dissipation}
 \end{array}$$

I - 2 - Formulation des termes "production" et "dissipation" :

I-2-1 Terme "production" :

En respectant l'analogie avec la production d'énergie cinétique turbulente de forme $\epsilon \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, il semble logique de constituer le terme de production de ν_e sous forme d'un produit du gradient de vitesse moyenne $\partial u_1 / \partial x_2$ par le niveau d'agitation turbulente supposé dans le cas présent proportionnel à ν_e :

La forme la plus compatible avec ces considérations conduit alors à :

$$\text{Production} \equiv G = A(\nu_e - \nu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|$$

où A est un coefficient numérique à déterminer en fonction des résultats expérimentaux.

I-2-2 Terme "dissipation" :

Il est obtenu par comparaison avec la décroissance d'une turbulence isotrope. Des essais récents (G. Comte-Bellot et S. Corrsin 1966) montrent que la décroissance de $\bar{q}^2$ est assez bien représentée par une loi de la forme $\bar{q}^2 \sim t^{-1,25}$. Cependant, dans un souci de sim-

plification, nous admettrons la loi approchée $\bar{q}^2 \sim x^{-1}$ (sans pour autant adopter une similitude complète des spectres).

On a ainsi :

$$\frac{d}{dt} \bar{q}^2 \sim - (\bar{q}^2)^2$$

Remarquant alors que l'équation relative à ν_e en l'absence de tout autre terme ("production", "convection", "diffusion") prend la forme :

$$\frac{\partial \nu_e}{\partial t} = - D \equiv \text{dissipation}$$

et admettant pour ν_e une loi de décroissance du type précédant, on a :

$$D \sim - \nu_e^2$$

La condition :

$$D = 0 \quad \text{pour} \quad x_2 \simeq \delta$$

conduit à l'expression :

$$D = (B/L_d^2) (\nu_e - \nu) \nu_e$$

où B est également un coefficient numérique à ajuster en fonction des données expérimentales.

Longueur caractéristiques de la dissipation :

En général, L_d sera une fonction de x_2 ; cependant, au voisinage de la frontière extérieure de l'écoulement turbulent, il est possible de choisir :

$$L_d \simeq \delta$$

δ étant l'épaisseur de la couche limite. Dans la région plus proche de la paroi, le choix de L_d sous la forme :

$$L_d = x_2$$

semble raisonnable, les dimensions caractéristiques des structures fines dissipatives suivant celles des structures à plus grande échelle. Dans le cas d'un écoulement turbulent libre, L_d sera la largeur totale du jet ou du sillage considéré.

I-2-3 Liaisons entre les coefficients numériques :

Dans toute la couche limite, hors le film visqueux, la tension de Reynolds a un effet prépondérant de sorte que :

$$\nu_e \gg \nu$$

Dans la zone turbulente de paroi,

$$x_2 u_f / \nu > 30, \quad x_2 / \delta < 0.2$$

les termes de diffusion et de convection peuvent être considérés comme négligeables par rapport aux termes de production et de dissipation. On peut alors dans cette région particulière, considérer que le terme de production équilibre le terme "dissipation", et l'équation relative à ν_e se réduit à la relation :

$$A(\nu_e - \nu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right| = \frac{B}{L_d^2} \nu_e (\nu_e - \nu)$$

De cette égalité, on déduit une expression particulière de la viscosité turbulente locale :

$$\nu_e = \frac{A}{B} L_d^2 \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|$$

expression évidemment à rapprocher de l'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl :

$$\nu_e \sim \nu_T = l^2 \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|$$

dans laquelle :
$$l = L_d \left(\frac{A}{B} \right)^{1/2}$$

En accord avec le fait que dans la zone de paroi :

$$l \propto x_2$$

A et B doivent par conséquent satisfaire approximativement à la relation :

$$A = K^2 B \quad \text{avec} \quad K = 0.41$$

I - 3 - Les effets du bord libre :

Il convient cependant, dans le cas des écoulements pariétaux turbulents de revenir sur le concept de diffusivité de Boussinesq.

On peut sans doute penser, et des essais semblent le confirmer, que le processus de diffusion est en première approximation lié à un double mécanisme turbulent. Si l'action des petites structures reste voisine de celle rencontrée dans un processus de diffusion classique, celui des grandes semble plus proche d'un mécanisme de transport mettant en cause des vitesses dont le module ne diffère pas tellement de celui de $U_y(x)$. Bien sûr, ce découpage reste très arbitraire et ne peut servir de guide au raisonnement. Si, cependant l'équation de Nee et Kovasznay est appliquée à un écoulement où n'apparaît pas directement l'effet d'une paroi, il est fort possible que l'ensemble du processus rendu plus homogène par l'absence de limites matérialisées puisse être pris globalement en charge dans le

(*) Les auteurs tentent une correction liée à l'intermittence qui est quelque peu à rapprocher de cette idée. Nous n'avons pas cru devoir la prendre en compte pour ne pas alourdir la méthode de calcul.

terme $\frac{\partial}{\partial x_2} \nu_e \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2}$; en raison de la gamme étendue des échelles turbulentes, la présence d'une paroi nous oblige à revoir notre formulation et à tenir compte à la fois d'un processus de diffusion à petite échelle $\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \nu_e \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \right\} \right)$ et d'un processus de diffusion à grande échelle par le terme $A_\varepsilon \left(\frac{x_2}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\nu_{e \max}}{u_1^\infty \delta} \right)^2 u_1^\infty \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2}$.

Le mécanisme de transport ici pris en compte est essentiellement de type "convection", en raison de l'ordre de grandeur des vitesses transversales qui le génèrent. Lié à la vitesse extérieure de l'écoulement libre adjacent, il peut ainsi dimensionnellement s'écrire sous la forme :

$$u_1^\infty \left(\frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \right)$$

La modulation en $(x_2 / \delta)^2$ introduite, est destinée à traduire l'influence plus marquée des mouvements à grande échelle dans la région externe de la couche limite.

La présence du nombre de Reynolds particulier $u_1^\infty \delta / \nu_{e \max}$ (où $\nu_{e \max}$ est la valeur maximale de la viscosité à une section x_1 donnée), fait intervenir dans ce mécanisme le taux de viscosité turbulente à l'intérieur même de la couche limite.

Le coefficient numérique $A_\varepsilon (*)$ règle l'influence du phénomène nouveau introduit, par rapport aux actions déjà prises en charge dans l'équation initiale proposée par Nee et Kovasznay (fig. 8 bis a).

Cette façon de reconnaître aux différents mouvements turbulents une certaine spécificité dans le processus global de diffusion, est bien entendu critiquable, mais cette décomposition pourrait être reliée à la

(*) L'ajustement du coefficient A_ε ainsi que celui des coefficients A et B est précisé dans le chapitre III.

présence d'une double structure turbulente décelée au moins dans le cas d'une turbulence de paroi par plusieurs auteurs (Blackwelder (1970) et Sabot (1972)).

Dans ces conditions, nous avons adopté comme équation de comportement de ν_e l'équation suivante :

$$U_1 \frac{\partial \nu_e}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} + D(x_2/\delta, x_1) \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu_e \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \right) + A (\nu_e - \nu) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{B (\nu_e - \nu)}{l_D^2} \nu_e$$

dans laquelle $D(x_2/\delta, x_1)$ s'identifie à :

$$A_E \left(\frac{x_2}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\nu_{e \max}}{U_1^\infty \delta} \right)^2 U_1^\infty$$

I - 4 Extension au cas des couches limites stratifiées :

Lorsqu'on s'intéresse aux couches limites thermiquement stratifiées, l'examen du bilan d'énergie turbulente mécanique conduit à :

$$U_1 \frac{\partial \overline{q^2/2}}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial \overline{q^2/2}}{\partial x_2} = - \overline{u_1 u_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{g}{T_0} \overline{u_2 \theta} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \overline{u_2 \left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right)} \right\} + \varepsilon$$

Cette équation fait apparaître outre les différents termes développés précédemment (chapitre I), un terme $\frac{g}{T_0} \overline{u_2 \theta}$ qui représente soit une perte, soit une production d'énergie turbulente due aux forces de poussée d'Archimède). Ce terme supplémentaire doit être rapproché

de la production $-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ due à l'interaction entre le mouvement moyen et le mouvement d'agitation ; l'influence relative des phénomènes thermiques et cinématiques est traduite directement par la valeur locale du nombre de Richardson :

$$R_f = \frac{g/T_0 \overline{u_2 \theta}}{(-\overline{u_1 u_2}) \partial u_1 / \partial x_2}$$

Nous avons songé, parallèlement à Rao, Nee et Yang (1972) à reporter ces considérations énergétiques dans l'équation de comportement de la viscosité turbulente, en introduisant le terme supplémentaire de production :

$$E \frac{R_i}{R_t} (\nu_e - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Dans une première étape plus schématique, en accord avec les études expérimentales portant sur les couches limites instables effectuées par Solal (1972) au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Lyon, l'équation de comportement de ν_e a été modifiée sous la forme :

$$(7) \quad u_1 \frac{\partial \nu_e}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} + D(x_2, \delta, x_1) \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu_e \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \right) + A k (\nu_e - \nu) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{B (\nu_e - \nu) \nu_e}{L_d^2}$$

le coefficient multiplicatif k affecté à la production définie en régime neutre, a été ajusté au modèle expérimental traité. Il est en général, supérieur à 1 en régime instable où les forces de poussée d'Archimède produisent de la turbulence ; il est inférieur à 1 en régime stable pour lequel les forces de poussée d'Archimède tendent à réduire l'énergie turbulente.

Chapitre II : Méthode de résolution des équations aux dérivées
partielles de la couche limite.

La méthode différentielle exposée utilise, outre les données valables près de la paroi, l'équation de quantité de mouvement (5) et l'équation (7) de comportement du coefficient ν_e du type de celle proposée par Nee et Kovasznay (1968). Le processus numérique d'intégration choisi est celui présenté par Patankar et Spalding (1967).

II - 1 Formulation générale :

II-1-1 Les équations de base :

Lorsqu'on néglige les effets de compressibilité en écoulement bidimensionnel statistiquement stationnaire dans le temps, les équations gouvernant le mouvement moyen sont :

- L'équation de continuité :

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} U_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} U_2 = 0$$

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$(9) \quad U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} U_1 + U_2 \frac{\partial}{\partial x_2} U_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu_e \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx_1}$$

et l'équation-supplémentaire qui traduit le mécanisme turbulent pris en charge à travers ν_e :

$$(10) \quad U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \nu_e + U_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \nu_e + D(x_2/\delta, x_1) \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu_e \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \right) + A k (\nu_e - \nu) \left| \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right| - \frac{B(\nu_e - \nu)}{L_d^2} \nu_e$$

U_1, U_2, ν_e, P sont les valeurs moyennes dans le temps des variables dépendantes et on a par exemple $u = U_1 + u_1$ avec $U_1 = \bar{u}, \bar{u}_1 = 0$.

II-1-2 Le système de coordonnées :

L'emploi d'un quadrillage rectangulaire est généralement mal adapté à la résolution des équations aux dérivées partielles sous forme de différences finies. La technique particulière proposée par Patankar et Spalding permet de surmonter cette difficulté de maillage. L'opération essentielle consiste à remplacer le système de coordonnées (x_1, x_2) par le système de Von Mises (x_1, ω) continûment adapté à la dimension transversale de la couche.

L'équation de continuité (8) est identiquement satisfaite si l'on introduit la fonction de courant ψ telle que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\rho U_2 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \rho U_1$$

la fonction de courant sans dimension ω est alors définie par

$$(11) \quad \omega = \frac{\psi - \psi_I(x_1)}{\psi_E(x_1) - \psi_I(x_1)} = \frac{\int_0^{x_2} \rho U_1 dx_2}{\int_0^h \rho U_1 dx_2} \quad (*)$$

où les valeurs $\psi_I(x_1)$ et $\psi_E(x_1)$ de la fonction de courant aux frontières $x_2=0$ et $x_2=h$ (fig. 1) sont telles que :

(*) Il est à remarquer que la fonction de courant $\psi = \int_0^{x_2} U_1 dx_2$ se prête également à la définition d'une autre variable transversale :

$$\omega' = \psi / \nu$$

Et on notera essentiellement le fait que dans la sous-couche visqueuse où :

$$\omega' \text{ a alors la forme } \quad U_1 / U_f = x_2 U_f / \nu$$

$$\omega' = \int_0^{x_2} \frac{U_1}{U_f} d\left(\frac{x_2 U_f}{\nu}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{U_1}{U_f}\right)^2$$

qui permettrait un raccordement aisé entre cette sous-couche visqueuse ($0 < x_2 U_f / \nu < 10$) et la zone turbulente adjacente, mais la forme sans dimension proposée en (11) offre l'avantage de rapporter la couche limite dans son ensemble au domaine fini en ω ($0 < \omega < 1$).

$$(12) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \omega \frac{\partial \psi_E}{\partial x_1} + (1-\omega) \frac{\partial \psi_I}{\partial x_1} = -\rho U_2$$

$$(13) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega}{\partial x_2} (\psi_E - \psi_I) = \rho U_1$$

Compte tenu de la définition de ω (11), et des relations (12) et (13), on déduit alors :

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\rho U_1}{\psi_E - \psi_I}$$

et en l'absence de transfert de fluide à travers la frontière pariétale I ($\psi_I \equiv 0$) on a :

$$(15) \quad U_2 = \frac{\omega}{\rho} m_E$$

où $m_E \equiv -\partial \psi_E / \partial x_1$ est le taux de transfert de masse à travers la surface E.

Dans le système (x_1, ω) ; en accord avec les liaisons (14) et (15), l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de comportement de ν_e s'écrivent respectivement :

$$(16) \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\omega m_E}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial U_1}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\rho^2 U_1 \nu_e}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial U_1}{\partial \omega} \right\} - \frac{1}{\rho U_1} \frac{dP}{dx_1}$$

$$\begin{aligned}
 (17) \text{ est } \frac{\partial \nu_e}{\partial x_1} + \frac{\omega m_E}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \nu_e}{\partial \omega} + \frac{D(x_2/\delta, x_1)}{\psi_E - \psi_I} \rho \frac{\partial \nu_e}{\partial \omega} \\
 = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\rho^2 u_1 \nu_e}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial \nu_e}{\partial \omega} \right\} + A(\nu_e - \nu) \frac{\rho}{\psi_E - \psi_I} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \omega} \right| \\
 - \frac{B(\nu_e - \nu)}{L_d^2 u_1} \nu_e
 \end{aligned}$$

II-1-3 Forme commune des équations :

A l'issue du changement de coordonnées les équations (16) et (17) prennent alors la forme commune =

$$(18) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + (a_\phi + b\omega) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + d_\phi$$

où ϕ représente soit u_1 soit ν_e ; a_ϕ est un terme dont l'expression dépend de la fonction u_1 ou ν_e considérée ; il en est de même de d_ϕ que l'on peut qualifier de terme "source" : dans l'équation de quantité de mouvement, ce terme représente l'apport des forces de pression dont l'intensité est alors fixée par des considérations externes à la couche limite ; dans l'équation de comportement de ν_e , il traduit l'équilibre turbulent production-dissipation. La figure 2 explicite les coefficients a_ϕ, b, c, d_ϕ .

Le schéma de résolution :

Etant donnée la nature parabolique de l'équation générale (18), les informations nécessaires à la résolution numérique sont les valeurs de $\phi(x_1)$ aux frontières I et E qui délimitent l'écoulement ainsi que le

profil initial $\phi(w)$ à la section $x_1 = x_0$. La connaissance des conditions aux limites sur ces trois frontières, permet alors le balayage pas à pas du domaine à étudier.

II-1-4 Les approximations à la frontière pariétale :

En général, la détermination des profils de vitesse moyenne dans une couche limite conduit à distinguer une région proche de la paroi à l'intérieur de laquelle le fluide reste sous la dépendance exclusive de données locales, d'une autre région où apparaissent les caractères globaux de l'écoulement.

Lorsque l'on s'approche de la paroi, l'importance des gradients transversaux rend imprécise la résolution des équations générales valables dans la région plus externe. Dans le développement présenté, la zone de paroi sera traitée par l'intermédiaire d'approximations traditionnelles susceptibles de s'adapter très simplement au schéma de résolution choisi.

Les fonctions algébriques qui sont employées par Patankar et Spalding (1967) et qui sont fondées sur une modification de l'hypothèse de Van Driest, ont été reprises. On exprime alors l'évolution du profil de vitesse et de viscosité par les lois en puissance du type :

$$u_1(x_2) \propto x_2^\beta$$

$$\nu_e(x_2) - \nu_e(0) \propto x_2^\gamma$$

dans la région $0 < x_2 < x_{2h}$, l'ordonnée de raccordement étant choisie telle que $0,05 < x_{2h} < 0,1$. Cependant, on convient ici de ne pas traiter par le calcul le voisinage immédiat de la paroi et ces lois simples ne sont en fait utilisées qu'à l'ordonnée de raccordement x_{2h} . Les exposants β et γ s'écrivent alors par définition :

$$\left[\beta \right]_{x_{2n}} = \frac{x_{2n}}{\left[U_1 \right]_{x_{2n}}} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right]_{x_{2n}}$$

$$\left[\gamma \right]_{x_{2n}} = \frac{x_{2n}}{\left[\nu_e \right]_{x_{2n}} - \left[\nu_e \right]_{x_2=0}} \left[\frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \right]_{x_{2n}}$$

Ils peuvent être exprimés en fonction des paramètres locaux sans dimension.

$$\mathcal{S} = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho U_1^2}$$

$$R = \frac{U_1 x_2}{\nu}$$

$$F = \frac{x_2}{\rho U_1^2} \frac{dP}{dx_1}$$

sous la forme :

$$\left[\beta \right]_{x_{2n}} = \left\{ \left(\mathcal{S} + F \right)^{1/2} / K \right\}_{x_{2n}} \quad K \simeq 0,41$$

$$\left[\gamma \right]_{x_{2n}} = 1 + \left[\beta \right]_{x_{2n}}$$

la détermination des profils $U_1(x_2)$, $\nu_e(x_2)$ à une section x_1 donnée, nécessite la connaissance des exposants β et γ à cette même section. En raison du schéma non itératif utilisé, ces exposants sont calculés en fonction des quantités U_1, x_2 et $\mathcal{E}_0$, connues à la section amont.

II - 2 Les équations sous forme de différences finies :

Pour obtenir une équation aux différences finies à partir d'une équation aux dérivées partielles, on remplace habituellement chacune de ces dérivées par son développement en série de Taylor. Cependant, il existe une autre méthode qui sera utilisée dans la présente étude : elle consiste à exprimer chaque élément de l'équation aux dérivées partielles sous la forme d'une moyenne sur un volume élémentaire choisi (fig. 3). Une hypothèse relative à la nature de la variation de ϕ entre les points du maillage rend alors possible une formulation linéaire en ϕ des équations de départ.

II-2-1 - Les approximations essentielles :

a) Dans la direction transversale ω , ϕ varie linéairement avec ω entre deux points consécutifs du maillage (fig. 4). D'une manière générale, la variation de ϕ s'exprime par les relations suivantes :

- demi-maille inférieure :

$$\text{aval :} \quad \phi_{x_D(\omega)} = - \frac{(\phi_{x_D(\omega_i)} - \phi_{x_D(\omega_{i-1})})}{\omega_i - \omega_{i-1}} (\omega_i - \omega) + \phi_{x_D(\omega_i)}$$

(19)

$$\text{amont :} \quad \phi_{x_u(\omega)} = - \frac{(\phi_{x_u(\omega_i)} - \phi_{x_u(\omega_{i-1})})}{\omega_i - \omega_{i-1}} (\omega_i - \omega) + \phi_{x_u(\omega_i)}$$

- demi-maille supérieure :

$$\text{aval :} \quad \phi_{x_D(\omega)} = \frac{(\phi_{x_D(\omega_{i+1})} - \phi_{x_D(\omega_i)})}{\omega_{i+1} - \omega_i} (\omega - \omega_i) + \phi_{x_D(\omega_i)}$$

(20)

$$\text{amont :} \quad \phi_{x_u(\omega)} = \frac{(\phi_{x_u(\omega_{i+1})} - \phi_{x_u(\omega_i)})}{\omega_{i+1} - \omega_i} (\omega - \omega_i) + \phi_{x_u(\omega_i)}$$

b) Sur toute ligne $\omega = C^k$, les valeurs de ϕ dans l'intervalle $[x_U, x_D]$ sauf pour $x_1 = x_U$ sont prises uniformes et égales aux valeurs de ϕ en x_D .

c) Les termes en $\partial / \partial \omega$ sont déterminés, conformément à l'approximation (a), à partir des valeurs de ϕ aux points du maillage à la section $x_1 = x_D$.

II - 2 - 2 Expression des différents termes de l'équation commune :

$$(18) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + (a_\phi + b\omega) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + d_\phi$$

a) Termes de convection :

La valeur moyenne du premier terme de l'équation (18) définie sur le volume élémentaire de contrôle s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \approx \left\{ \int_{x_U}^{x_D} \int_{\omega_{i-1/2}}^{\omega_{i+1/2}} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} d\omega dx \right\} / \left((x_D - x_U) \left(\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2} \right) \right)$$

et l'introduction de la linéarité de ϕ en fonction de ω entre deux points consécutifs du maillage conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \approx & P_1 (\phi_{x_D(\omega_{i+1})} - \phi_{x_U(\omega_{i+1})}) + P_2 (\phi_{x_D(\omega_i)} - \phi_{x_U(\omega_i)}) \\ & + P_3 (\phi_{x_D(\omega_{i-1})} - \phi_{x_U(\omega_{i-1})}) \end{aligned}$$

où

$$P_1 \equiv \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{4(x_D - x_U)(\omega_{i+1} - \omega_{i-1})}$$

$$P_2 \equiv \frac{3}{4(x_D - x_U)}$$

$$P_3 \equiv \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{4(x_D - x_U)(\omega_{i+1} - \omega_{i-1})}$$

les mêmes hypothèses de calcul entraînent :

$$b\omega \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \simeq R_1 \phi_{x_D(\omega_{i+1})} + R_2 \phi_{x_D(\omega_i)} + R_3 \phi_{x_D(\omega_{i-1})}$$

$$R_1 \equiv \frac{b}{4} \left\{ \frac{\omega_{i+1} + 3\omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}} \right\}$$

$$R_2 \equiv -\frac{b}{4}$$

$$R_3 \equiv -\frac{b}{4} \left\{ \frac{\omega_{i-1} + 3\omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}} \right\}$$

Le terme "convection" complet peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + b\omega \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = g_1 \phi_{x_D(\omega_{i+1})} + g_2 \phi_{x_D(\omega_i)} + g_3 \phi_{x_D(\omega_{i-1})} + g_4$$

$$g_1 \equiv P_1 + R_1$$

$$g_2 \equiv P_2 + R_2$$

$$g_3 \equiv P_3 + R_3$$

$$g_4 \equiv -P_1 \phi_{x_U(\omega_{i+1})} - P_2 \phi_{x_U(\omega_i)} - P_3 \phi_{x_U(\omega_{i-1})}$$

b) Termes "diffusion" :

Selon le même processus de calcul, le terme

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right\} \approx \left\{ \int_{x_u}^{x_D} \int_{\omega_{i-1/2}}^{\omega_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) d\omega dx_1 \right\} \frac{1}{(x_D - x_u)(\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2})}$$

se développe sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right\} \approx \frac{2}{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}} \left[\left\{ c_{xu(\omega_{i+1/2})} \left(\frac{\phi_{x_D(\omega_{i+1})} - \phi_{x_D(\omega_i)}}{\omega_{i+1} - \omega_i} \right) \right\} - \left\{ c_{xu(\omega_{i-1/2})} \left(\frac{\phi_{x_D(\omega_i)} - \phi_{x_D(\omega_{i-1})}}{\omega_i - \omega_{i-1}} \right) \right\} \right]$$

où $c_{xu(\omega_{i+1/2})} = \frac{\rho^2 [U_{1xu(\omega_{i+1})} + U_{2xu(\omega_i)}] [\nu_{e xu(\omega_{i+1})} + \nu_{e xu(\omega_i)}]}{4 (\psi_E - \psi_I)^2}$

et $c_{xu(\omega_{i-1/2})} = \frac{\rho^2 [U_{1xu(\omega_i)} + U_{2xu(\omega_{i-1})}] [\nu_{e xu(\omega_i)} + \nu_{e xu(\omega_{i-1})}]}{4 (\psi_E - \psi_I)^2}$

tandis que le terme

$$a_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \approx \left\{ \int_{x_u}^{x_D} \int_{\omega_{i-1/2}}^{\omega_{i+1/2}} a_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \omega} d\omega dx_1 \right\} / (x_D - x_u)(\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2})$$

(où a_ϕ supposé linéaire en ω est pris à la section $x_1 = x_U$) s'écrit :

$$a_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{2}{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}} \left[\left\{ \frac{a_\phi x_{U_{(\omega_{i+1})}}}{8} + \frac{3}{8} a_\phi x_{U_{(\omega_i)}} \right\} (\phi_{x_D_{(\omega_{i+1})}} - \phi_{x_D_{(\omega_i)}}) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{a_\phi x_{U_{(\omega_{i-1})}}}{8} + \frac{3}{8} a_\phi x_{U_{(\omega_i)}} \right\} (\phi_{x_D_{(\omega_i)}} - \phi_{x_D_{(\omega_{i-1})}}) \right]$$

Ces développements de forme analogue, conduisent à l'expression générale suivante du terme "diffusion" complet :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) - a_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \simeq g_5 (\phi_{x_D_{(\omega_{i+1})}} - \phi_{x_D_{(\omega_i)}}) - g_6 (\phi_{x_D_{(\omega_i)}} - \phi_{x_D_{(\omega_{i-1})}})$$

(où $a_\phi \equiv 0$ lorsque $\phi \equiv U_1$).

Il est important de noter que les coefficients g_i qui interviennent à la fois dans les termes de convection et de diffusion sont exprimés en fonction de quantités connues à la section amont.

c) Terme "source" :

Compte tenu de leur forme plus ou moins complexe, les termes "source" relatifs à V_2 et à U_1 font l'objet d'un traitement différent ; cependant, quelle que soit la fonction ϕ , la variation de d_ϕ est supposée linéaire en ω entre deux points consécutifs du maillage et conduit à des relations du type de celles utilisées pour ϕ (19) et (20).

Terme "source" relatif à l'équation de quantité de mouvement :

$$\text{Sur toute ligne } \omega = C^k \text{ les valeurs de } d_{U_1} = - \frac{1}{\rho U_1} \frac{dP}{dx_1}$$

dans l'intervalle (x_u, x_D) sont prises uniformes et égales à la valeur de d_{u_1} en $x_1 = x_D$.

Ainsi la moyenne

$$d_{u_1} \approx \frac{\int_{\omega_{i-1/2}}^{\omega_{i+1/2}} d_{u_1, x_D}(\omega) d\omega}{(\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2})}$$

fait apparaître uniquement des quantités prises en aval sur le contour d'intégration où $d_{u_1, x_1=x_D}$ se développe au 1er ordre sous la forme :

$$d_{u_1, x_1=x_D} \approx d_{u_1, x_1=x_u} + \left[\frac{\partial d_{u_1}}{\partial x_1} \right]_{x_1=x_u} (x_D - x_u)$$

On parvient alors à l'expression linéaire :

$$d_{u_1} \approx \beta_1 U_{1, x_D}(\omega_{i+1}) + \beta_2 U_{1, x_D}(\omega_i) + \beta_3 U_{1, x_D}(\omega_{i-1}) + \beta_4$$

où

$$\beta_1 \equiv \frac{P_1}{\rho U_{1, x_u}^2(\omega_{i+1})} \frac{dP}{dx_1} (x_D - x_u)$$

$$\beta_2 \equiv \frac{P_2}{\rho U_{1, x_u}^2(\omega_i)} \frac{dP}{dx_1} (x_D - x_u)$$

$$\beta_3 \equiv \frac{P_3}{\rho U_{1, x_u}^2(\omega_{i-1})} \frac{dP}{dx_1} (x_D - x_u)$$

$$\beta_4 \equiv -2 \frac{dP}{dx_1} (x_D - x_u) \left\{ \frac{P_1}{\rho U_{1, x_u}^2(\omega_{i+1})} + \frac{P_2}{\rho U_{1, x_u}^2(\omega_i)} + \frac{P_3}{\rho U_{1, x_u}^2(\omega_{i-1})} \right\}$$

Expression du terme lorsque $\phi \equiv \nu_e$:

Il reste à traduire le terme "source" de l'équation de comportement de ν_e :

$$d\nu_e = \frac{A(\nu_e - \nu)}{\psi_E - \psi_I} k p \left| \frac{\partial u_1}{\partial \omega} \right| - \frac{B}{L_d^2 u_1} (\nu_e - \nu) \nu_e$$

par le même processus d'intégration sur la surface de contrôle.

L'équation qui régit directement u_1 apparaissant comme la plus fondamentale, il nous semble possible de conduire quelque peu différemment cette intégration de $d\nu_e$ en la simplifiant. En conséquence, seules les variations en ω seront prises en considération, et, sur toute ligne $\omega = C^t$ les valeurs de $d\nu_e$ dans l'intervalle seront supposées approximativement uniformes et égales à la valeur de $d\nu_e$ en $x_1 = x_u$.

d'où

$$d\nu_e \approx \frac{\int_{\omega i - 1/2}^{\omega i + 1/2} d\nu_e x_u(\omega) d\omega}{(\omega i + 1/2 - \omega i - 1/2)}$$

l'introduction des quantités P_1, P_2 et P_3 conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} d\nu_e &= P_1 d\nu_e x_u(\omega i + 1) (x_D - x_u) \\ &+ P_2 d\nu_e x_u(\omega i) (x_D - x_u) \\ &+ P_3 d\nu_e x_u(\omega i - 1) (x_D - x_u) \end{aligned}$$

analogue à celle du terme Δ_4 relatif à $d u_1$.

d) Bilan :

L'équation aux différences finies complète

$$(21) \quad g_1 \phi_{x_D, (w_{i+1})} + g_2 \phi_{x_D, (w_i)} + g_3 \phi_{x_D, (w_{i-1})} + g_4 = \\ g_5 (\phi_{x_D, (w_{i+1})} - \phi_{x_D, (w_i)}) - g_6 (\phi_{x_D, (w_i)} - \phi_{x_D, (w_{i-1})}) + d_\phi$$

est alors simplement construite en rassemblant les différents termes calculés. Cette équation est valable en tout point intérieur au maillage et elle a la forme suivante :

$$(22) \quad \phi_{x_D, (w_i)} = A_\phi \phi_{x_D, (w_{i+1})} + B_\phi \phi_{x_D, (w_{i-1})} + C_\phi$$

qui est évidemment linéaire.

Dans le cas où $\phi \equiv U_1$ elle s'écrit :

$$(23) \quad U_{1, x_D, (w_i)} = A_{U_1} U_{1, x_D, (w_{i+1})} + B_{U_1} U_{1, x_D, (w_{i-1})} + C_{U_1}$$

avec

$$A_{U_1} \equiv \frac{g_5 - g_1 + s_1}{g_2 + g_5 + g_6 - s_2}$$

$$B_{U_1} \equiv \frac{g_6 - g_3 + s_3}{g_2 + g_5 + g_6 - s_2}$$

$$C_{U_1} \equiv \frac{s_4 - g_4}{g_2 + g_5 + g_6 - s_2}$$

et dans le cas où $\phi \equiv \nu_e$

$$(24) \quad \nu_{e \infty D, (\omega i)} = A_{\nu_e} \nu_{e \infty D, (\omega i+1)} + B_{\nu_e} \nu_{e \infty D, (\omega i-1)} + C_{\nu_e}$$

avec

$$A_{\nu_e} \equiv \frac{g_5 - g_1}{g_2 + g_5 + g_6}$$

$$B_{\nu_e} \equiv \frac{g_6 - g_3}{g_2 + g_5 + g_6}$$

$$C_{\nu_e} \equiv \frac{g_4 - g_4}{g_2 + g_5 + g_6}$$

Remarque :

Si les coefficients g_1, g_2, g_3 restent identiques quelle que soit la fonction ϕ considérée, il n'en est pas de même des coefficients $g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9$ qui s'expriment en fonction de termes propres à chacune des deux fonctions.

II-2-3 Relations linéaires au voisinage des frontières :

En formant l'équation aux différences finies, nous avons considéré que la variation de ϕ entre deux points consécutifs de la grille était linéaire en ω . Cependant, cette approximation n'est plus valable lorsqu'on approche des frontières. Les valeurs fictives ont alors été introduites de manière à traiter ces conditions particulières.

La figure 4 définit les conventions d'indice utilisées ; les lignes de grille divisent l'intervalle de $\omega=0$ à $\omega=1$ en n tranches. Les

points de grille indicés 1 et 2 désignent respectivement la valeur exacte et la valeur fictive à la frontière I (figure 5). Les points indicés 3, 4 ... n + 1 définissent les lignes de grille intérieures successives à l'exclusion des lignes frontières I et E. Les valeurs fictive et réelle à la frontière E sont respectivement indicées n + 2 et n + 3. L'indice 2.5 se rapporte à la ligne médiane entre la frontière I et la ligne de grille 3. De même, la ligne n + 1.5 est médiane entre la frontière E et la ligne n + 1.

Les lignes indicées 2.5 et n + 1.5 ont une signification particulière ; en effet, elles représentent les frontières entre lesquelles se situent tous les volumes de contrôle utilisés dans l'équation aux différences finies. Le rôle de la valeur fictive ϕ_2 est de définir une droite (ϕ_2, ϕ_3) qui approche correctement le profil réel $\phi = f(\omega)$ dans l'intervalle $(\omega_{2,5}, \omega_3)$. On peut alors obtenir par interpolation linéaire entre les points 2 et 3, la pente du profil $\phi = f(\omega)$ et la valeur correspondante de ϕ au point 2.5. Les valeurs correctes de ces deux quantités dépendent de la nature de la frontière et des approximations faites relativement aux propriétés de l'écoulement.

Au voisinage de la paroi, on identifie l'intervalle en $\omega(\omega_1, \omega_{2,5})$ à l'intervalle en $x_2(0, x_{2h})$ à l'intérieur duquel les évolutions des profils de vitesse et de viscosité sont traduites par les lois en puissance :

$$U_1(x_2) \propto \omega^{\beta/1+\beta}$$

$$\nu_e(x_2) - \nu_e(0) \propto \omega^{\gamma/1+\beta}$$

déduites des relations

$$U_1(x_2) \propto x_2^\beta$$

$$\nu_e(x_2) - \nu_e(0) \propto x_2^\gamma$$

établies au paragraphe (II-1-4), après introduction de la définition

$$d\omega = \frac{\rho U_1}{\varphi_E - \varphi_I} dx_2$$

Pour U_1 par exemple, on écrira alors au point 2.5 les égalités :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial U_1}{\partial \omega} \right]_{2,5} &= \frac{U_1(3) - U_1(2)}{\omega(3) - \omega(2)} \propto \left[\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^{\beta/1+\beta}) \right]_{2,5} \\ \left[U_1 \right]_{2,5} &= \frac{U_3 + U_2}{2} \propto \left[\omega^{\beta/1+\beta} \right]_{2,5} \end{aligned}$$

Elles permettent d'exprimer la valeur fictive $U_1(2)$ en fonction de la valeur réelle $U_1(3)$ par la relation linéaire :

$$\left[U_1 \right]_2 = \frac{1}{1 + 2\beta} \left[U_1 \right]_3$$

La même démarche est effectuée pour le calcul de la valeur fictive $\nu_e(2)$.

A la frontière libre E, on parvient à des expressions semblables en supposant que dans l'intervalle $[\omega_{n+1,5}, \omega_{n+3}]$, le profil de vitesse suit une loi parabolique en fonction de x_2 et le profil de viscosité une loi linéaire.

Les différentes relations utilisées au voisinage des frontières I et E sont résumées dans le tableau suivant :

Frontière intérieure :

$$\begin{aligned} U_1(2) &= \frac{1}{1 + 2\beta} U_1(3) \\ \nu_e(2) &= \nu_e(3) \left(\frac{1 + \beta - \gamma}{1 + \beta + \gamma} \right) + \nu_e(1) \left(\frac{2\gamma}{1 + \beta + \gamma} \right) \end{aligned}$$

Frontière extérieure :

$$U_{1(n+2)} = U_{1(n+1)} \cdot G + U_{1(n+3)} \cdot (1-G)$$

$$V_{e(n+2)} = V_{e(n+1)} \left[\frac{3G+1}{3+G} \right] + V_{e(n+3)} \left[\frac{2(G-1)}{3+G} \right]$$

où G défini par

$$G \equiv \frac{U_{1(n+2)} + U_{1(n+1)} - 8U_{1(n+3)}}{5(U_{1(n+2)} + U_{1(n+1)}) + 8U_{1(n+3)}}$$

est calculé à partir des valeurs $U_{1(i)}$ connues à la section amont.

II-2-4 Solution générale de l'équation :

Compte tenu des relations linéaires obtenues dans la zone interne et au voisinage des frontières du domaine à étudier, le système général relatif à toute fonction ϕ s'écrit :

$$(25) \quad \phi_i = A_{\phi i} \phi_{i+1} + B_{\phi i} \phi_{i-1} + C_{\phi i}$$

(où $i = 2, 3, 4 \dots n+2$),

et se met sous la forme simple :

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i$$

avec

$$P_i = \frac{A_{\phi_i}}{1 - B_{\phi_i} P_{i-1}}$$

$$Q_i = \frac{B_{\phi_i} Q_{i-1} + C_{\phi_i}}{1 - B_{\phi_i} P_{i-1}}$$

$$P_2 = A_{\phi_2}$$

$$Q_2 = B_{\phi_2} \phi_1 + C_{\phi_2}$$

ϕ_1 est une condition donnée à la frontière I.

Après avoir calculé les coefficients P_i et Q_i pour chaque valeur de i comprise entre 2 et $n+2$, les fonctions ϕ_i sont obtenues par substitutions successives à partir de la valeur $\phi_{(n+3)}$ donnée à la frontière extérieure.

II-2-5 Contrôle de la grille :

Le procédé de différences finies nous permet donc d'obtenir les profils $\phi = f(\omega)$ dans l'intervalle $0 \leq \omega \leq 1$ et le domaine de calcul doit inclure tous les points où les fonctions ϕ varient de façon significative ; m_E , qui traduit le taux d'entraînement du fluide à l'intérieur de ce domaine, joue un rôle important dans l'ajustement de la grille.

Le problème est ici résolu en imposant à une ligne de grille particulière indiquée "NB" de s'identifier à la frontière de la couche. Sur cette ligne ω_{NB} , la vitesse atteint alors un pourcentage donné de la vitesse extérieure adjacente.

Le taux d'entraînement est ainsi calculé en écrivant l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur cette ligne particulière :

$$m_E = \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\rho^2 u_1}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial u_1}{\partial \omega} \right\}}{\left\{ \omega \frac{\partial u_1}{\partial \omega} \right\}_{\omega = \omega_{NB}}} - \frac{\psi_E - \psi_I}{\left\{ \omega \frac{\partial u_1}{\partial \omega} \right\}_{\omega = \omega_{NB}}} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)_{\omega = \omega_{NB}} + \frac{1}{\rho[u_1]_{\omega = \omega_{NB}}} \frac{dP}{dx_1} \right\}$$

le terme

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 \right]_{\omega = \omega_{NB}} = \frac{[u_1(NB)]_{x_1 = x_D} - [u_1(NB)]_{x_1 = x_U}}{x_D - x_U}$$

est connu à partir de la définition de la ligne ω_{NB} . Les autres termes sont évalués à la section $x_1 = x_U$ par l'intermédiaire de relations linéaires analogues à celles établies au paragraphe (II-2).

Choix de la ligne NB :

Sur cette ligne, nous avons considéré que la vitesse atteignait 99 % de la vitesse extérieure, quant au choix de l'indice NB, il a une signification plus profonde : en effet, entre les lignes indicées NB et $n + 3$, il est nécessaire que les fonctions Φ évoluent correctement pour atteindre les conditions extérieures données. En général, nous avons pris $NB = n$, mais cet ajustement dépend ici essentiellement de la valeur de $x_2 / \delta > 1$ pour laquelle $\Phi \equiv \nu_e$ atteint sa valeur donnée sur la frontière.

Dans certaines configurations d'écoulements très accélérés, les lignes de courant tendent à prendre approximativement la direction de la frontière externe de la couche limite et les propriétés d'entraînement du

fluide s'annulent. Dans ces conditions, on évitera toute fluctuation dans les valeurs de m_E d'un pas à l'autre en imposant une condition limite du type :

$$m_E \geq 0$$

II-2-6 Calcul de la distance transversale x_2 :

Après chaque pas d'intégration dans la direction x_1 , il est nécessaire de calculer la distance $x_2(i)$ qui sépare chaque ligne de grille de la frontière I.

Par définition, nous avons :

$$dx_2 = (\psi_E - \psi_I) \frac{d\omega}{\rho u_1}$$

et après intégration par la règle des trapèzes :

$$x_{2(i+1)} - x_{2(i)} = \frac{1}{2} (\psi_E - \psi_I) \left\{ \left[\rho u_{1(i+1)} \right]^{-1} + \left[\rho u_{1(i)} \right]^{-1} \right\} (\omega_{i+1} - \omega_i)$$

on déduit alors le tableau :

$$x_{2(1)} = 0$$

$$x_{2(2,5)} = \omega_{2,5} (\psi_E - \psi_I) (1 + \beta) / \rho [u_1]_{2,5}$$

$$x_{2(3)} - x_{2(2,5)} = \frac{1}{2} (\omega_3 - \omega_{2,5}) (\psi_E - \psi_I) \left(\rho [u_1]_{2,5}^{-1} + \rho [u_1]_3^{-1} \right)$$

$$x_{2(i+1)} - x_{2(i)} = \frac{1}{2} (\omega_{i+1} - \omega_i) (\psi_E - \psi_I) \left(\rho [u_1]_{i+1}^{-1} + \rho [u_1]_i^{-1} \right)$$

$$x_{2(n+1,5)} - x_{2(n+1)} = \frac{1}{2} (\omega_{n+1,5} - \omega_{n+1}) (\psi_E - \psi_I) \left(\rho [u_1]_{n+1,5}^{-1} + \rho [u_1]_{n+1}^{-1} \right)$$

$$x_{2(n+3)} - x_{2(n+1,5)} = (1 - \omega_{n+1,5}) (\psi_E - \psi_I) / \chi_E \rho [u_1]_{n+1,5}$$

la quantité $\chi_E = 1/3 + 2 \left[u_1 \right]_{n+3} / 3 \left[u_1 \right]_{n+1,5}$ est déterminée en tenant compte de l'évolution parabolique du profil de vitesse, au voisinage de la frontière extérieure.

De même la distance $\mathcal{X}_2(2.5)$ est calculée en tenant compte de l'évolution du profil de vitesse près de la paroi.

La quantité $\psi_E - \psi_I$ qui intervient dans le calcul de est obtenue à partir de l'expression :

$$(\psi_E - \psi_I)_{x_1 = x_D} = (\psi_E - \psi_I)_{x_1 = x_U} m_E (x_D - x_U)$$

II-2-7 Déroulement du calcul :

- Le maillage en ω est construit de telle sorte que les lignes de grille relativement espacées dans la zone externe soient plus rapprochées dans la zone de paroi, bien qu'aucune de ces lignes ne soit située très près de la sous-couche visqueuse. Dans toutes les configurations traitées, le nombre d'intervalles est tel que :

$$20 < n < 40$$

- Le procédé de résolution utilisé conserve la stabilité du système différentiel lorsque le pas Δx est élevé, mais de ce pas dépend la précision du calcul ; en général Δx est rapporté à l'épaisseur de la couche limite sous la forme :

$$\Delta x \equiv x_D - x_U = k \delta$$

avec

$$0,2 < k < 1$$

- A la section de départ $x_1 = x_0$, le choix de la distribution de vitesses moyennes résulte en général de données expérimentales. Dans le

cas où cette information n'est pas accessible, on a alors considéré que les profils non-dimensionnels de vitesse moyenne dans une couche limite, pouvaient être approchés par la loi de puissance :

$$\frac{U_1}{U_1^\infty} = \left(\frac{x_2}{\delta} \right)^{1/n}$$

avec n compris entre 5 et 7 pour les nombres de Reynolds considérés.

La grille en ω est alors construite à partir de la définition :

$$\omega_{(i)} = \frac{\int_0^{x_{2(i)}} U_1 dx_2}{\int_0^{x_{2(n+3)}} U_1 dx_2}$$

Le profil de viscosité turbulente ν_e doit également être spécifié. Expérimentalement, il est défini à partir des contraintes tangentielles et des profils de vitesse moyenne par :

$$\frac{\nu_e}{U_1^\infty \delta} = - \frac{\overline{u_1 u_2}}{(U_1^\infty)^2} \bigg/ \frac{\partial U_1 / U_1^\infty}{\partial x_2 / \delta}$$

On a ici adopté cette forme sans dimension, bien qu'elle ne soit pas la plus commode lorsque l'écoulement est uniquement conditionné par la tension pariétale $\mathcal{T}_0$, ce qui se produit en l'absence de toute sollicitation venant de l'extérieur.

C'est la raison pour laquelle Nee et Kovasznay suggèrent de rapporter la viscosité ν_e à $U_\beta \delta$. Cependant, il nous a semblé qu'en regard aux cas que nous cherchions à aborder et dans lesquels les actions mécaniques extérieures devaient avoir un rôle prépondérant, la forme réduite $\nu_e / U_1^\infty \delta$ était plus adaptée. La figure 8 représente différents profils non-dimensionnels de viscosité obtenus à partir de résultats expérimentaux qui ont été utilisés dans le calcul.

- A la paroi, les conditions aux frontières portant sur les fonctions U_1 et V_e sont données par :

$$U_{1(1)} = 0 \quad \forall x_1$$

$$V_{e(1)} = V \quad \forall x_1$$

- A la frontière libre, les conditions introduites s'écrivent :

$$U_{1(n+3)} = U_1^\infty(x_1)$$

$$V_{e(n+3)} = V \quad \forall x_1$$

On remarquera que cette coïncidence des valeurs $U_1^\infty(x_1)$ et $V_e(x_1)$ imposée par le procédé de calcul sur la dernière ligne du maillage n'est pas obligatoirement vérifiée en réalité.

Dans le cas particulier où une turbulence extérieure est très globalement prise en compte à la frontière E de la couche, la répartition longitudinale $V_e^\infty(x_1)$ est introduite dans les calculs sous la forme :

$$V_{e(n+3)} = V_e^\infty(x_1)$$

- Organisation du programme :

La structure du programme de calcul correspondant à la méthode de résolution développée est représentée sur la figure 6. Le calcul progresse vers l'aval à partir des données $U_1 = f(x_2)$ et $V_e = g(x_2)$ sur une section située en amont. Les coefficients A_{U_1} , B_{U_1} , C_{U_1} et les coefficients A_{V_e} , B_{V_e} , et C_{V_e} sont déterminés simultanément sur cette section amont, les fonctions $\phi_i = V_e(i)$ et $\phi_i = U_1(i)$ sur la section aval sont ensuite déduites par un procédé de substitution en tenant compte des conditions aux frontières sur les lignes 1 et $n+3$.

Chapître III - Résultats et confrontations expérimentales.

La méthode de calcul précédemment décrite a d'abord été appliquée à des cas fondamentaux (couches limites sans gradients de pression et couches limites sensiblement d'équilibre avec gradients de pression positifs). A l'issue de cette analyse, les valeurs des coefficients A et B proposés par Nee et Kovasznay ont été conservées, et la valeur du coefficient A_ϵ intervenant dans le terme qui traduit les effets du bord libre a été ajustée.

Des cas plus complexes, dont certains présentent un grand intérêt sur le plan industriel ont ensuite été traités :

- (1) couche limite se développant en présence d'un milieu extérieur turbulent (turbulence quasi isotrope).
- (2) couche limite se développant sur un profil dans le sillage d'un obstacle.
- (3) couche limite chauffée.

Le cas (1) est une première tentative orientée vers une étude de couches limites le long des aubes de turbomachines à plusieurs étages. Le cas (3) représente une couche limite atmosphérique instable. Quant au cas (2), il nous a été mentionné par la Société des Avions Marcel Dassault qui étudie l'effet du sillage des volets de bord d'attaque sur les couches limites du profil principal.

L'extension de la méthode à ces configurations d'écoulements nécessite l'introduction d'informations supplémentaires sur l'évolution de $\mathcal{V}_e$; pour le cas (1), une répartition $\mathcal{V}_e(x)$ a été imposée à la frontière E de la couche ; pour le cas (3), les instabilités thermiques sont prises en compte

sous forme d'un accroissement de la production de ν_e . Le cas (2), ne présente pas par lui-même de difficultés nouvelles mais la possibilité de le prendre en charge globalement a bien montré l'intéressante capacité d'adaptation du procédé de calcul.

III - 1 - Valeurs numériques des coefficients :

En considérant dans un premier temps, la zone de la couche limite située entre la paroi et l'ordonnée où ν_e est maximum, nous avons ajusté le couple de coefficients A et B. Dans la région considérée, les effets de bord libre sont négligeables de sorte qu'on a pu prendre $A_\varepsilon = 0$. A l'issue de cette étude essentiellement conduite sur plaque plane, les valeurs $A = 0,133$ et $B = 0,8$ déjà indiquées par Nee et Kovasznay ont été choisies.

L'influence de A_ε sur l'évolution des couches limites avec gradients de pression extérieurs est présentée sur les figures 8 bis b et 8 ter. On a utilisé les trois valeurs de A_ε ($A_\varepsilon = 0$; $A_\varepsilon = 420$; $A_\varepsilon = 840$) et les valeurs des gradients de pression correspondant à $U_1 \propto x_1^m$ avec $m = -0,15$ et $m = -0,255$.

Pour la confrontation avec l'expérience, on a utilisé les études de Wiegardt (1968), de Charnay (1971) pour un gradient nul, celles de Bradshaw (1968), ainsi que celles de Ludwig et Tillmann (1968) pour des gradients positifs et négatifs.

Dans tous les cas, on note essentiellement une meilleure diffusion de la viscosité dans la direction x_2 lorsque A_ε croît.

Dans la suite des calculs, on a retenu la valeur $A_\varepsilon = 840$.

III - 2 - Couches limites se développant en présence de gradients de pression extérieurs :

Les performances du programme de calcul ont été confrontées aux principales études expérimentales qui avaient été retenues au Congrès de Stanford (1968), soient les mesures de Wiegardt pour la couche limite sans gradient de pression extérieur, les mesures de Bradshaw pour la couche limite avec gradient de pression positif et celles de Ludwig et Tillmann pour la couche limite avec gradient de pression négatif. Nous nous sommes intéressés également aux travaux de Klebanoff dans lesquels la structure de la turbulence est finement analysée.

Dans la présentation des résultats, nous avons conservé la distinction entre la zone de paroi et la zone turbulente centrale, cette distinction étant généralement admise et vérifiée par l'expérience.

III-2-1 Zone turbulente de paroi :

En l'absence de toute perturbation extérieure, on suppose en principe que la région de paroi ne reçoit pratiquement aucune information de la zone turbulente centrale et vérifie une relation du type :

$$\frac{U_1}{U_f} = \int \left(\frac{x_2 U_f}{\nu} \right)$$

où n'apparaissent que des données locales U_f et ν .

Cependant, dans le cas où existe un gradient de pression extérieur, l'équation de quantité de mouvement intégrée de 0 à x_2 fait apparaître le terme $\frac{x_2}{\xi_P} \frac{dP}{dx_1}$ qui traduit une pénétration de l'information extérieure représentée par le terme $\frac{dP}{dx_1}$. Cette zone perd son indépendance pour des valeurs de x_2 d'autant plus petites que le gradient de pression est plus grand. L'ensemble du problème est traduit dans la représentation

classique des profils de vitesse moyenne :

$$\frac{U_1}{U_f} = f\left(\frac{x_2 U_f}{\nu}\right)$$

donnés sur les figures 13 et 14. On reconnaît l'habituelle loi logarithmique et une zone de déviation du profil de vitesses moyennes vis-à-vis de cette loi de paroi plus prononcée lorsqu'il existe un gradient de pression extérieur.

Nous examinerons avec plus d'attention à travers la loi de distribution des contraintes locales et à travers les bilans d'énergie, comment s'opère l'influence de ces sollicitations.

a) Les contraintes tangentielles :

La figure 9 met en évidence les modifications importantes que subissent les tensions réduites $\tau/\rho(U_1^\infty)^2 = f(x_2/\delta)$ pour différents gradients de pression correspondant à $U_1^\infty \sim x_1^m$. Nous avons considéré les cas $m = 0$, $m = -0,15$ et $m = -0,255$. L'évolution du coefficient de frottement C_f en fonction de x_1 est également représentée pour ces trois configurations sur les figures 15 et 16.

En l'absence de gradient externe, la contrainte tangentielle maximale est observée à la paroi ; sous l'effet d'un gradient ce maximum se déplace vers les régions centrales de l'écoulement, tout en restant situé dans une zone telle que $x_2/\delta < 0,5$; ce maximum est d'autant plus prononcé que $\frac{dP}{dx_1}$ est grand.

Dans tous les cas, il existe dans une région correspondant au plus à $0 < \frac{x_2}{\delta} < 0,2$, une zone de distribution quasi linéaire de la tension mais la pente de droite peut varier dans de très larges proportions en passant d'une valeur négative à une valeur positive. Par une simplification radicale de l'équation de quantité de mouvement, Spalding écrit :

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \frac{\partial P}{\partial x_1} x_2$$

L'expérience vérifie assez mal l'approximation ainsi proposée ; Townsend (1961) conduit un calcul plus nuancé. Les termes de convection et de diffusion ne sont plus alors systématiquement négligés : les premiers sont évalués à partir d'un modèle de loi de paroi, les seconds reliés à un gradient d'énergie cinétique turbulente. Il obtient alors une expression du type :

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \alpha x_2$$

avec $\alpha = \frac{dP}{dx_1} + \frac{\partial \mathcal{E}_0 / \partial x_1}{2K^2} \left[\left(\log \left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}_0} \rho}{\nu} x_2 \right) + A - 1 \right)^2 + 1 \right]$

qui est plus en accord avec l'expérience que l'expression proposée par Spalding. De toute façon, et comme on pouvait s'y attendre, le domaine de validité s'amenuise tandis que croît le gradient de pression. L'expression proposée par Townsend reste néanmoins peu commode d'emploi en particulier du fait qu'elle contient la dérivée de $\mathcal{E}_0$ par rapport à x_1 . Ainsi Bradshaw doit organiser son calcul pour évaluer cette dérivée à partir des valeurs prises par $\mathcal{E}_0$ aux deux pas de calcul antérieurs.

En dépit des avantages de principe présentés par la formulation de Townsend, nous avons, eu égard à certaines difficultés matérielles de calcul, choisi une expression de $\mathcal{E}$ qui se rapproche de celle de Spalding. Mais son emploi peut être légitimé dans notre cas, car elle n'est en fait utilisée que sur l'intervalle $(0, x_{2h})$. Rappelons en effet que la relation :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{dP}{dx_1} x_2$$

et l'expression de Van Driest pour la définition de ν_e permettent de représenter convenablement le champ de vitesse et de viscosité sous la forme de lois de puissance, sur la frontière intérieure qui limite la zone d'application du groupe des équations contrôlant le mouvement.

b) Bilan énergétique :

La distinction d'une loi de paroi et d'une loi de sillage trouve également sur la plaque plane, sa justification dans l'analyse des phénomènes de transport turbulent. D'après Klebanoff (1955) (fig. 10), on constate en effet que l'énergie turbulente est essentiellement d'origine pariétale ; de plus cette énergie est en grande partie dissipée sur place, seule une faible fraction vient alimenter les zones extérieures plus défavorisées. Ceci suffit à expliquer l'autonomie dont bénéficie cette région. La figure 11 montre que le bilan énergétique au sens de l'équation de comportement de ν_e est très semblable à celui établi par Klebanoff pour l'énergie cinétique turbulente et cette analogie permettra de préciser le cheminement des énergies dans d'autres cas de calcul.

Dans le cas de gradients de pression positifs, on possède encore cette double source d'informations et on remarque essentiellement que le maximum de production "au sens" de $\bar{q}^2$ et ν_e ne se situe plus à la paroi (fig. 12). Au voisinage de celle-ci la dissipation devient alors supérieure à la production et le déséquilibre est compensé par la présence d'un terme de diffusion. On peut à ce point remarquer la faiblesse des modèles turbulents qui imposent implicitement près de la paroi un équilibre entre la production et la dissipation (emploi de la longueur de mélange par exemple).

III-2-2 Zone externe :

Dans la zone externe de la couche limite où l'écoulement est lié plus directement à la vitesse U_1^∞ du fluide et aux paramètres géométriques tels que δ, δ_1 , nous avons en général rendu sans dimension en fonction de ces quantités, les résultats numériques obtenus.

a) Epaississement de la couche limite :

Les configurations correspondant à $m = 0$, $m = -0,15$ et $m = -0,255$ ont été envisagées. L'évolution avec x_1 de l'épaisseur de la couche limite a été représentée (fig. 17). Celles des épaisseurs de déplacement, de quantité de mouvement et d'énergie sont également obtenues (fig. 18, 19, 20). On constate un très bon accord entre les résultats expérimentaux et les valeurs calculées.

b) Profils de vitesse moyenne :

L'influence du gradient sur les profils non-dimensionnels de vitesse est donnée sur la figure 24. Plus intéressante encore est la confrontation directe des profils dimensionnels en U_1 (fig. 21, 22, 23) car elle met en évidence les diverses sources d'erreur en particulier celle qui affecte δ . On note à nouveau que les écarts entre calculs et expériences sont surtout localisés près de la paroi.

c) Profils non-dimensionnels de viscosité :

Les profils de viscosité $\frac{\nu_e}{U_1^\infty \delta_1} = f\left(\frac{x_2}{\delta}\right)$ sont représentés sur la figure 25. Pour les configurations dites d'équilibre ($m = 0$, $m = -0,15$, et $m = -0,255$), ces profils sont approximativement identiques. On constate en outre que la viscosité réduite varie peu pour $0,2 < \frac{x_2}{\delta} < 0,75$ et satisfait approximativement à une relation du type $\nu_e \sim U_1^\infty \delta_1$ qui rappelle globalement dans cette région certains caractères connus aux écoulements libres.

Cette apparente universabilité de la viscosité $\nu_e / U_1^\infty \delta_1$ a été retenue sur le plan du calcul par Mellor et Herring (1968) tandis que Cebeci et Smith (1968), reprenant une idée classique de "quasi homogénéité" des caractéristiques turbulentes dans les bouffées, se contentent de modéliser le phénomène par l'intermédiaire du facteur d'intermittence.

d) Cas des écoulements accélérés :

Nous avons dans cette étude porté peu d'attention aux écoulements accélérés. Aussi dans ce domaine, nous ne présentons qu'un seul exemple. Le cas traité correspond à celui de Ludwig et Tillmann qui réalise des conditions voisines de l'équilibre.

La figure 26 présente l'évolution des paramètres C_f et δ_2 et leur comparaison aux mesures publiées (21). La figure 27 donne l'évolution dimensionnelle de la couche limite en présence de ce léger gradient de pression négatif.

On peut regretter que le cas de gradients plus intenses n'ait pas été envisagé car il se rencontre industriellement ; cependant, certaines difficultés pourraient apparaître au niveau de la fonction d'entraînement.

III - 3 - Développement d'une couche limite turbulente sur plaque plane en présence d'un champ extérieur également turbulent :

L'approche entreprise dans le domaine des écoulements perturbés est relative à l'étude de la couche limite se développant sur paroi plane en l'absence d'un gradient de pression externe. Ce cas fondamental permet déjà de dégager des phénomènes nouveaux essentiels. Pour la confrontation expérimentale, nous avons utilisé les mesures de Charnay, Comte-Bellot et Mathieu (1971).

La soufflerie dans laquelle ont été obtenus les résultats communiqués, a une veine d'essai de 2,5 m de longueur et une section de 0,5 X 0,5 m². La plaque plane placée parallèlement à l'écoulement a une longueur de 2 m. Les conditions cinématiques au voisinage du bord d'attaque sont réglées de telle manière que la couche limite présente en l'absence de perturbations extérieures, les caractéristiques d'une couche limite turbulente en équilibre pour $x_1 > 0,5$ m.

La perturbation extérieure est créée par une grille située en amont du bord d'attaque de la plaque. L'intensité du champ turbulent décroît un peu le long de la plaque, mais cette servitude expérimentale ne sera pas prise en compte dans le calcul.

III-3-1 Conditions aux limites et conditions initiales de calcul :

Dans le but de prendre approximativement en compte les effets de la turbulence externe sur la couche limite, nous avons tenté de relier la viscosité à la frontière de la couche perturbée à des paramètres plus spécifiques du champ turbulent extérieur tels que le taux de turbulence $\tilde{u}_1^\infty / U_1^\infty$ et l'échelle intégrale transversale de corrélations dans l'espace $L_{11,2}$ (fluctuations de vitesse $\tilde{u}_I^\circ$).

La figure 31 donne pour une échelle de longueur $L_{11,2}$ approximativement constante quelle que soit la mesure de turbulence réalisée, l'évolution de la viscosité à la frontière, en fonction du produit $\tilde{u}_1^\infty L_{11,2}$. Une certaine dépendance de ν_e^∞ avec $\tilde{u}_1^\infty$ apparaît, mais ν_e n'est pas simplement proportionnel à $\tilde{u}_1^\infty L_{11,2}$. Expérimentalement (Charnay 1971) on constate également que pour un niveau de turbulence fixé, la viscosité à la frontière et l'évolution de la couche limite dans son ensemble restent indépendantes de l'échelle de longueur $L_{11,2}$ du champ extérieur. On prend ainsi conscience de la complexité d'un problème où l'on doit probablement tenir compte de la restructuration de la turbulence extérieure par le gradient de vitesse moyenne (Mathieu 1971). On s'est ici limité à une correspondance approximative entre la distribution de la viscosité $\nu_e^\infty / U_1^\infty \delta$ et celle de l'intensité turbulente $\tilde{u}_1^\infty / U_1^\infty$.

Dans le cas particulier présenté ici, l'intensité du champ fluctuant extérieur $\tilde{u}_1^\infty / U_1^\infty$ décroît de 5,5 % à 4 % entre les abscisses $x_1 = 0,4$ m et $x_1 = 1$ m ($U_1^\infty = 10$ m/s). A l'abscisse $x_1 = 0,7$ m l'intensité du champ turbulent atteint la valeur $\tilde{u}_1^\infty / U_1^\infty = 4,7$ %, valeur à laquelle correspond la viscosité moyenne $\nu_e^\infty / U_1^\infty \delta = 0,007$, retenue pour conduire aisément le calcul.

Compte tenu de cette condition à la frontière E, l'évolution de la couche limite est calculée de $x_1 = 0,2$ m à $x_1 = 1,3$ m. A la section de départ $x_1 = 0,2$ m; le profil est approché par la loi :

$$\frac{U_1}{U_1^\infty} = \left(\frac{x_2}{\delta} \right)^{1/n} \quad (*)$$

et l'épaisseur de la couche limite δ est égale à 16,6 mm.

III-3-2 - Confrontations préliminaires :

En l'absence de turbulence extérieure, nous avons pu vérifier que le développement de la couche limite dans la soufflerie correspondait à celui qui est déterminé par le programme de calcul. Les résultats présentés permettent de contrôler qu'il existe sur les profils dimensionnels (fig. 28) et sur la loi d'évolution longitudinale de U_f (fig. 29) une bonne concordance.

Cependant si l'on trace en fonction de x_1 des lignes équivitesse, on note un accord qui a tendance à se détériorer lorsque l'on s'approche de la frontière extérieure de la couche (fig. 30).

(*) La valeur $n = 5,3$ a été ici retenue, elle est en accord avec les résultats expérimentaux de Charnay 1971 lorsque $\tilde{u}_1^\infty / U_1^\infty \simeq 0,3$ %

III-3-3 - Discussion des résultats dans le cas où existe une turbulence extérieure :

Compte tenu des conditions imposées aux frontières et à la section de départ, on a déterminé les profils de vitesse moyenne aux abscisses $x_1 = 0,35$ m, $x_1 = 0,50$ m, $x_1 = 0,70$ m et $x_1 = 1$ m. Un contrôle expérimental a été effectué au niveau des deux dernières sections (fig. 31 bis). On a aussi représenté le profil de vitesse sous la forme réduite $U_1 / U_1^\infty = f(\frac{x_2}{\delta})$ (fig. 32) et considéré la contrainte tangentielle $\mathcal{E} / \rho U_f^2 = f(x_2)$ (fig. 33). On remarque que l'introduction d'une turbulence extérieure rend plus compact le profil des vitesses et accroît la contrainte tangentielle à une position x_2 / δ donnée (fig. 34). Le profil réduit de vitesse au voisinage de la paroi est donné également sous la forme $U_1 / U_f = f(\frac{x_2 U_f}{\nu})$ (fig. 35). Là encore, la cohérence de l'écoulement apparaît du fait que la loi de sillage s'inscrit en négatif par rapport à la loi de paroi. Il semble cependant que dans cette représentation le calcul révèle moins fortement que l'expérience, cet effet de cohérence.

Dans l'étude concernant l'influence des gradients de pression extérieure positifs mais modérés, nous avons vu que le maximum de production ne s'éloignait pas trop de la paroi, ce qui laissait sensiblement inchangé le sens de cheminement des informations à travers la couche. La situation se présente ici de façon nettement différente ; effectivement, la figure 36 fait apparaître la présence d'une production, au sens de l'équation de comportement de $\mathcal{U}$, plus répartie qu'en l'absence de turbulence extérieure ; mais il faut bien noter que dans l'équation dont il vient d'être fait état, la courbe de production s'aligne sur celle de $\mathcal{E}$. Peut-être plus éclairante est l'allure du terme qui traduit la diffusion, surtout si l'on considère un cas où l'intensité de la turbulence extérieure reste modérée (fig. 37), la zone turbulente centrale apparaissant comme alimentée depuis la région de paroi et depuis la zone externe de la couche. Comme le signale J. Mathieu (1971) une situation analogue mais beaucoup plus accusée se

présente dans le cas du jet pariétal où deux centres producteurs alimentent l'écoulement.

III - 4 Développement d'une couche limite en présence d'un sillage.

Les résultats présentés nous ont été communiqués par les Etablissements Marcel Dassault qui ont appliqué la méthode de calcul au profil défini sur la fig. 38. Le problème consiste à obtenir l'évolution de la couche limite qui se développe sur le corps principal d'une aile compte tenu du sillage issu du volet de bord d'attaque. Les données d'entrée sont le profil initial de vitesse et la loi de répartition du coefficient réduit $\nu_e / U_1^\infty \delta$ (fig. 39 et 40).

Le profil initial de vitesse moyenne a été obtenu par exploration au pitot dans la section (1). La couche limite initiale étant pratiquement inexistante dans cette configuration d'écoulement, la viscosité initiale $\nu_e(x_0)$ approximativement uniforme en travers du sillage a été déduite de la relation empirique :

$$\nu_e = \nu_e(x_0) = \chi_1 b (U_{1\max} - U_{1\min})$$

dans laquelle χ_1 est un coefficient numérique, b est la largeur du sillage, $U_{1\max}$ et $U_{1\min}$ sont respectivement la valeur maximale et minimale de la vitesse moyenne dans ce sillage.

Les profils obtenus sur les profils de vitesse U_1 / U_1^∞ et de viscosité $\nu_e / U_1^\infty \delta$ aux abscisses $x_1 = 0,05$ m, $x_1 = 0,1$ m et $x_1 = 0,15$ m sont également indiqués sur les figures 39 et 40. La confrontation avec les études expérimentales (fig. 41) est relative à l'évolution transversale de la vitesse $U_1 / U_1^\infty = f(x_2)$ à l'abscisse $x_1 = 0,40$ m (référéncée (2) sur le profil). La prévision offerte par le calcul s'avère dans ce cas excellente.

Les premiers résultats sont évidemment très partiels ; cependant, il nous est apparu intéressant de les signaler du fait de leur importance technique.

III - 5 Développement d'une couche limite destabilisée par chauffage.

Rappelons succinctement que l'idée développée (*) dans le domaine des couches limites thermiquement stratifiées s'appuie essentiellement sur l'équation de l'énergie cinétique turbulente :

$$u_1 \frac{\partial \bar{q}^2/2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \bar{q}^2/2}{\partial x_2} = - \bar{u}_1 \bar{u}_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \bar{u}_2 \bar{\theta} \frac{g}{T_0} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\bar{u}_2 \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} \right\} \right) + \varepsilon$$

dans laquelle la production turbulente est alors accrue du terme $\bar{u}_2 \bar{\theta} g/T_0$.

Le rôle destabilisant du champ thermique peut ainsi être caractérisé localement par le nombre de Richardson :

$$R_f = \frac{g/T_0 \bar{u}_2 \bar{\theta}}{-\bar{u}_1 \bar{u}_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}}$$

et globalement par la longueur de Monin-Obukhov :

$$L_0 = - \frac{u_f^3}{K g/T_0 H/\rho c_p}$$

où K est la constante de Karman

et H est le flux thermique soumis à la convection.

Dans l'équation de comportement de ν_e , l'effet destabilisant du chauffage est pris en charge au moyen d'un coefficient k portant sur la production $A(\nu_e - \nu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|$.

(*) Cette première tentative dans le domaine des couches limites thermiquement stratifiées a été conduite indépendamment de celle de Rao, Nee et Yang (1972).

La soufflerie de Schon et Solal (1972) dans laquelle ont été effectuées les mesures rapportées est à circuit ouvert. La veine a une longueur de 10 m et une section rectangulaire de $1,20 \times 1 \text{ m}^2$. Elle est munie d'un plancher de polyester porté à une température constante T_0 grâce à un circuit secondaire d'air chauffé.

Une source ponctuelle de gaz traceur est placée à la paroi et la concentration en gaz à l'intérieur du panache est mesurée à l'aval à différentes sections et pour différents cas d'instabilités d'écoulements. A partir de ces mesures, on peut passer au cas d'une source linéaire et déterminer la répartition de la diffusivité transversale de masse ν_m dans la couche limite (Solal, Schon et Mathieu 1972).

En l'absence de stratification, on a trouvé que les valeurs de $\nu_e / u_1^\infty \delta$ coïncidaient avec celles de $\nu_m / u_1^\infty \delta$ (fig. 42). Dans la mesure où, pour l'écoulement étudié, le coefficient de diffusivité de masse et le coefficient de diffusivité de quantité de mouvement sont voisins, on peut accorder une certaine confiance au calcul.

Dans le cas d'un écoulement légèrement instable ($\Delta T = 42^\circ$) on va encore supposer que l'égalité $\nu_e \equiv \nu_m$ est valable.

Pour une instabilité telle que $\delta^* = -0,4 \text{ m}$, on parvient alors à réaliser dans la région $x_2/\delta < 0,3$, la concordance entre les mesures de $\nu_m / u_1^\infty \delta$ et un profil $\nu_e / u_1^\infty \delta$ issu du calcul, en multipliant par le coefficient $k = 1,5$ le terme qui rend compte de la production dans l'équation de comportement de ν_e (fig. 42).

Il ne nous a pas été possible de pousser davantage cette confrontation mais la qualité de ces premiers résultats et l'intérêt porté par Rao, Nee et Yang à ce type de problème, nous a paru autoriser une publication aussi fragmentaire.

Conclusion

L'ensemble des résultats présentés repose en ce qui concerne la physique du phénomène, sur une équation de comportement de la viscosité turbulente ν_e analogue à celle proposée par Nee et Kovasznay et pour ce qui est de la méthode de calcul, sur un procédé introduit par Spalding et ses élèves.

En ce qui concerne l'équation qui régit la dynamique de ν_e nous avons été amenés, de façon à améliorer les recoupements avec l'expérience, à introduire un terme qui cherche à prendre en compte de façon plus spécifique l'action sur la diffusion des structures turbulentes à grande échelle. Cette action devrait à notre avis, être contraignante surtout lorsque le champ turbulent est transversalement inhomogène. Si nous nous sommes ainsi autorisés à procéder à ce découpage fictif, c'est que la détermination expérimentale des coefficients de corrélation semble accuser dans certains cas une cassure mettant en évidence une double structure turbulente. Bien sûr il ne s'agit là que d'une tentative et à ce titre, elle reste fragile. Ce qui semblerait le plus accréditer cette manière d'appréhender le problème est certainement le bon accord mis en évidence avec les résultats expérimentaux aussi variés que ceux proposés. Non seulement l'action d'un gradient positif ou négatif a été prise en compte mais encore celle d'une turbulence extérieure, d'un sillage ou d'un phénomène thermique destabilisant.

Tout ceci laisse à penser que le modèle physique sous-jacent dans cette méthode de calcul respecte assez bien la réalité.

Il resterait à s'assurer que des actions mécaniques externes plus intenses ne mettent pas en péril le modèle. C'est cela qu'il conviendra dans une prochaine étape, de vérifier.

REFERENCES

- BLACKWELDER R. - Large Scale Motion of a turbulent Boundary Layer with a zero and a favorable Pressure Gradient. The Johns Hopkins University (1970).
- BRADSHAW P. - Inactive motion and pressure fluctuations in turbulent boundary layers. J. F. M. vol. 30 Part 2 (1967).
- BRADSHAW P. - The turbulence structure of equilibrium boundary layers. J. F. M. Vol. 29 Part 4 (1967).
- BRADSHAW P. - Ferris D.H. et ATWELL N.P. - Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. J.F.M. Vol. 28 Part 3 pp. 593-616 (1967).
- BRADSHAW P. - Equilibrium boundary layer in mild positive pressure gradient. Afosr IFP Stanford Conference. Vol. II pp. 233-246 (1968).
- BRADSHAW P. - Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. N. P. L. Aero Report 1247 (1969).
- CHARNAY G. , COMTE-BELLOT G. et MATHIEU J. - Development of a turbulent boundary layer on a flat plate in an external turbulent flow. AGARD Conference "Turbulent Shear Flow" Londres (1971).
- COLES D. E. et HIRST E.A. - Computation of turbulent boundary layers. Afosr IFP Standord Conference. Vol. II (1968).
- COMPTE-BELLOT G. et CORRSIN S. - The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence J. Fluid Mech. Vol. 25 pp. 657-682 (1966).
- DALY B. J. et HARLOW F.H. - Transport Equations in turbulence. The Physics of Fluids. Vol. 13 Number 11 (1970).
- GAY B., SPETTEL F., JEANDEL D. et MATHIEU J. - Méthode de détermination d'un convergent . C. R. Acad. SC. Paris t.272 pp. 1662-1665 (1971).
- HANJALIC K. et LAUNDER B.E. - A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. J. Fluid Mech. vol. 52 part. 4 pp. 609-638 (1972).

- 13] HERRING H. J. et MELLOR L. G. - A class of momentum integral methods for turbulent boundary layers based on the family of equilibrium profiles. Afosr IFP Stanford Conference Vol. I (1969).
- 14] JANIGRO A. - Optimisation de l'écoulement dans une grille d'aubes décelératrices à forte cambrure, par modification de la répartition des vitesses axiales. Institut Von Karman de Dynamique des Fluides (1967).
- 15] JEANDEL D. et MATHIEU J. - Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles de la couche limite. C.R. Acad. Sc Paris t. 274 Série A pp. 1510 (8 mai 1972).
- 16] JEANDEL D., CHARNAY G. et MATHIEU J. - Calcul du développement d'une couche limite turbulente en présence d'un champ extérieur également turbulent, vérification expérimentale. C.R. Acad. Sc. Paris (12 juin 1972).
- 17] JONES W. P. et LAUNDER B.E. - The prediction of laminarization with a two-equation of turbulence. Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 15 pp. 301-314 (1971).
- 18] KLEBANOFF P.S. - Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NACA Report 1247 (1955).
- 19] KLINE S. J., MORKOVIN M. V., SOVRAN G. et COCKRELL D. J. - Proc. on Computation of turbulent boundary layers, Afosr IFP Stanford Conference. Vol I pp. 1 - 570 (1968).
- 20] KOVASZNAY L. S. G. , KIBENS V. et BLACKWELDER R. F. - Large scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer. J. Fluid Mech. Vol 41 Part 2 pp. 283-325 (1970).
- 21] LUDWIEG H. et TILLMANN W. - Accelerating Flow. Afosr IFP Stanford Conference. Vol. II pp. 83-97 (1968).
- 22] LUMLEY J. L. et PANOFISKY H.A. - The structure of Atmospheric Turbulence. Interscience Publishers - New York (1964).
- 23] LUMLEY J.L. - Rational Approach to Relations between Motions of Differing Scales in Turbulent Flows. The Physics of Fluids, Vol. 10 Number 7 (1967).

- 24] MATHIEU J. et TAILLAND A. - Jet pariétal. C. R. Acad. Sc. Paris t.261
pp. 2282-2285 (1965).
- 25] MATHIEU J. - Remarks on turbulent flows with free stream boundaries.
Von Karman Institute for fluid Dynamics
Lectures series 36 (1971).
- 26] MATHIEU J. - Contribution à l'étude aérothermique d'un jet plan évoluant
en présence d'une paroi. Thèse Fac. des
Sc de l'Univ. de Grenoble -1959-
- 27] MICHEL R., QUEMARD C. et DURANT R. - Application d'un schéma de
longueur de mélange à l'étude des couches
limites turbulentes d'équilibre. ONERA note
n° 154 (1969).
- 28] MICHEL R. - Méthode de calcul de la couche limite turbulente tridimension-
nelle jusqu'à la séparation, application à un
cas simple de turbomachine. ONERA Paris
(18-21 Avril 1972).
- 29] NEE V. W. et KOVASZNAY L. S. G. - The calculation of the incompressible
turbulent boundary layers by a simple theory.
Stanford Conference Vol. II pp. 300-330 (1968).
- 30] NEE V. et KOVASZNAY L.S.G. - Simple phenomenological theory of turbulent
shear flows. The Physics of Fluids vol. 12
Number 3 (1968).
- 31] NG K. H. et SPALDING D.B. - Turbulence model for boundary layers near
walls. The Physics of Fluids. Vol. 15 number
1 (janvier 1972).
- 32] PATANKAR S. V. et SPALDING D. B. - A finite difference Procedure. Heat
and Mass Transfer in boundary Layers. Int.
J. Heat Mass Transfer n° 10 pp. 1389-1411
(1967).
- 33] PHILLIPS O.M. - The maintenance of Reynolds stress in turbulent shear
flow. J. Fluid Mech. Vol. 27 Part 1 pp. 131-
144 (1967).
- 34] RAO K. S., NEE V.W. et YANG K.T. - Mass Diffusion in a neutral or ther-
mally stratified atmospheric surface layer.
Heat Transfer and Fluid Mechanics Laboratory
University of Notre Dame. Indiana 46 556
Technical Report 71-28.

- 35] ROTTA J.C. - Recent attempts to develop a generally applicable calculation
méthod for turbulent shear flow layers.
Aerodynamische Versuchanstalt Göttingen
AGARD Conference "Turbulent Shear Flow"
Londres (1971).
- 36] SABOT J. et COMTE-BELLOT G. - Mémoires des fluctuations longitudinales
de vitesse en conduite lisse circulaire.
C.R. Acad. Sc. Paris (1972).
- 37] SOLAL J. , SCHON J.P. et MATHIEU J. - Fourth All union heat and mass
transfer conference - Minsk - Etude de la
diffusion de masse dans une couche limite
turbulente stratifiée. (1972).
- 38] SPALDING D. B. et CHI S.W. - The drag of a compressible turbulent bound-
ary layer on a smooth flat plate with and
without heat transfer. J. Fluid Mech. Vol.
18 Part 1 (1964).
- 39] SPALDING D.B. et PATANKAR S.V. - Heat and Mass transfer in boundary
Layers. Morgan Grampian London (1967).
- 40] SPALDING D.B. - Heat and Mass transfer in boundary layers. Heat Transfer
section department of mechanical enginee-
ring. Imperial College - Londres - Part
III (1969).
- 41] TAYLOR G.I. - The transport of Vorticity and heat through fluids in turbulent
motion. Proc. Roy Soc. London A 135
(1932).
- 42] TENNEKES H. et LUMLEY J.L. - A first Course in Turbulence. The MIT
press Cambridge, Massachussetts et Lon-
dres, England (1971).
- 43] TOWNSEND A.A. - Equilibrium layers and wall turbulence. J. Fluid Mech.
Vol. 11 Part 1 pp. 97-120 (1961).
- 44] WIEGHARDT K. et TILLMANN W. - Flat-plate flow. Afosr IFP Stanford
Conference Vol. 11 pp. 98-123 (1968).

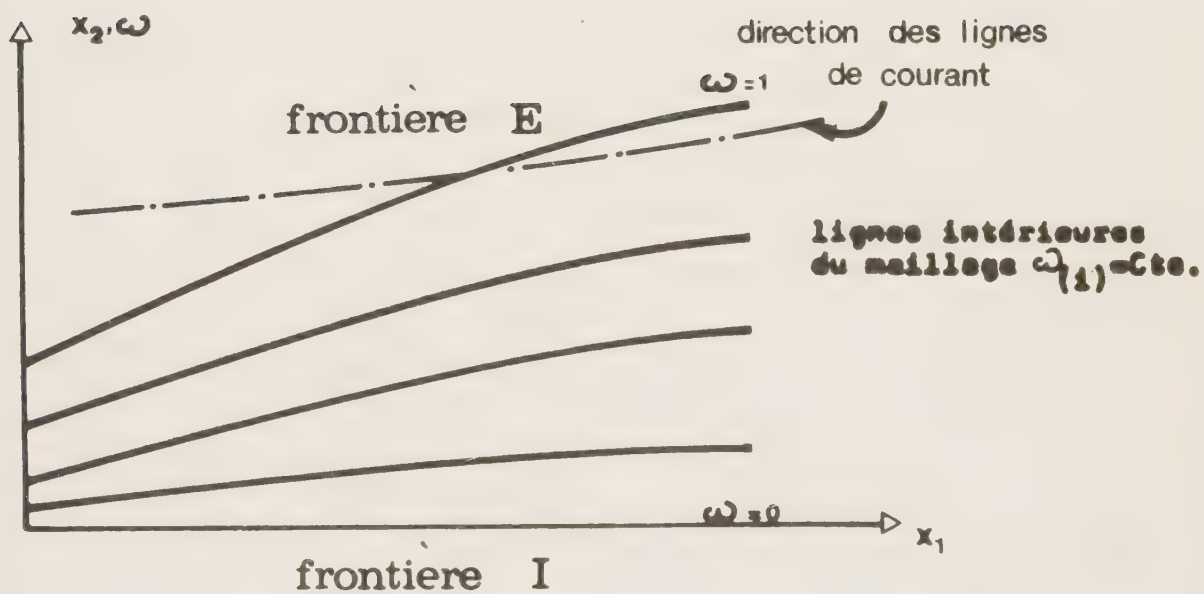


Fig. 1 Le système de coordonnées.

	U_1	V_e
a_ϕ	0	$\Lambda_e U_1 = \frac{\rho}{\psi_E - \psi_I} \left(\frac{V_{e \max}}{U_1 \delta} \right)^2 \left(\frac{x_2}{\delta} \right)^2$
b	$-\frac{1}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \psi_E}{\partial x_1}$	$-\frac{1}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \psi_E}{\partial x_1}$
c	$\frac{\rho^2 U_1 V_e}{(\psi_E - \psi_I)^2}$	$\frac{\rho^2 U_1 V_e}{(\psi_E - \psi_I)^2}$
d_ϕ	$-\frac{1}{\rho U_1} \frac{dP}{dx_1}$	$\frac{A(V_e - U)}{\psi_E - \psi_I} \rho \left \frac{\partial u_1}{\partial \omega} \right - \frac{B(\mu_e - U)U_e}{L_d^2 U_1}$

Fig. 2 Expression des différents coefficients de l'équation commune en ϕ

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\omega_{i+1} + \omega_i)$$

$$\phi_{i-1/2} = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_{i-1})$$

ω_{i+1}

ω_i

ω_{i-1}

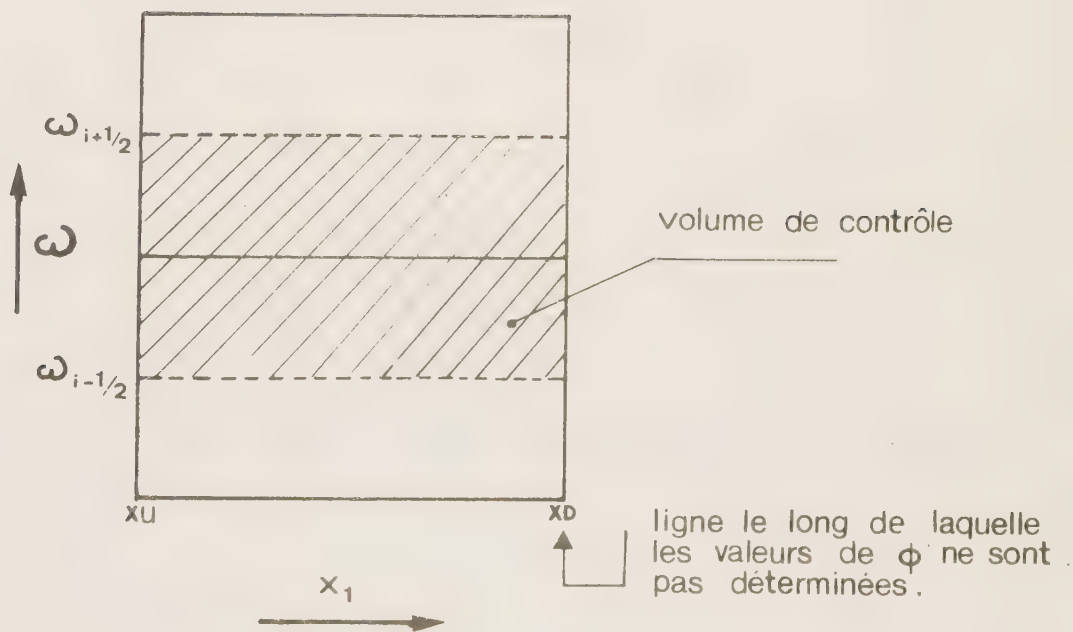


Fig. 3 Maille élémentaire d'intégration.



Fig. 4 Disposition générale du maillage.

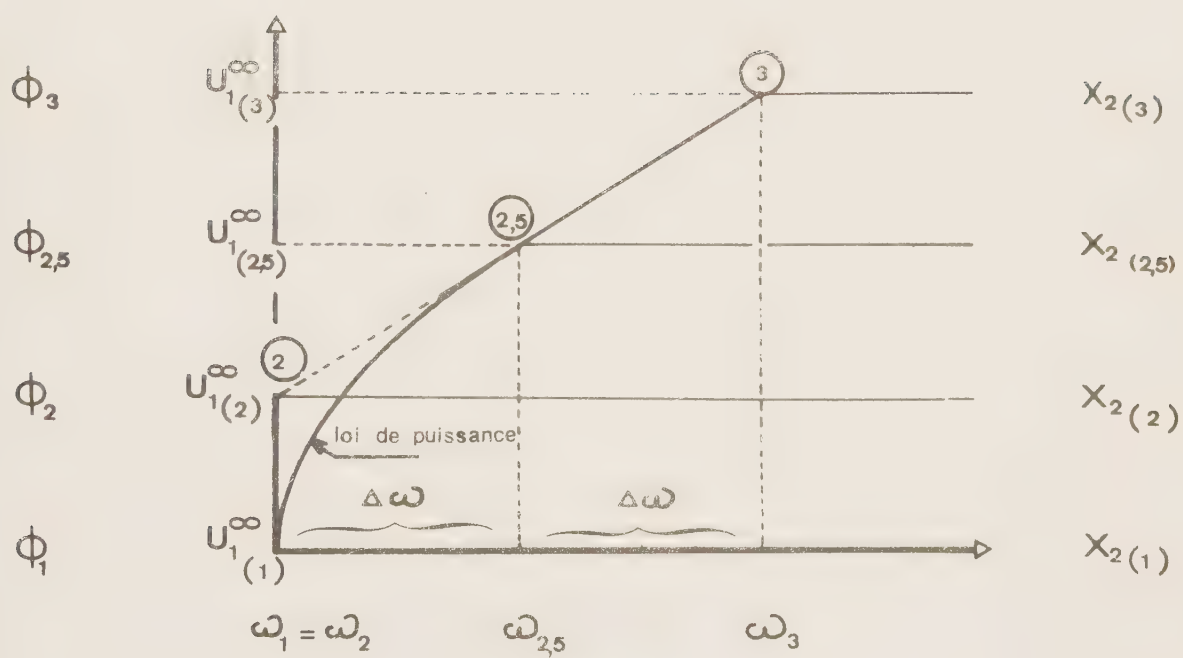


Fig. 5 Représentation schématique des approximations relatives à la fonction ϕ au voisinage de la paroi.

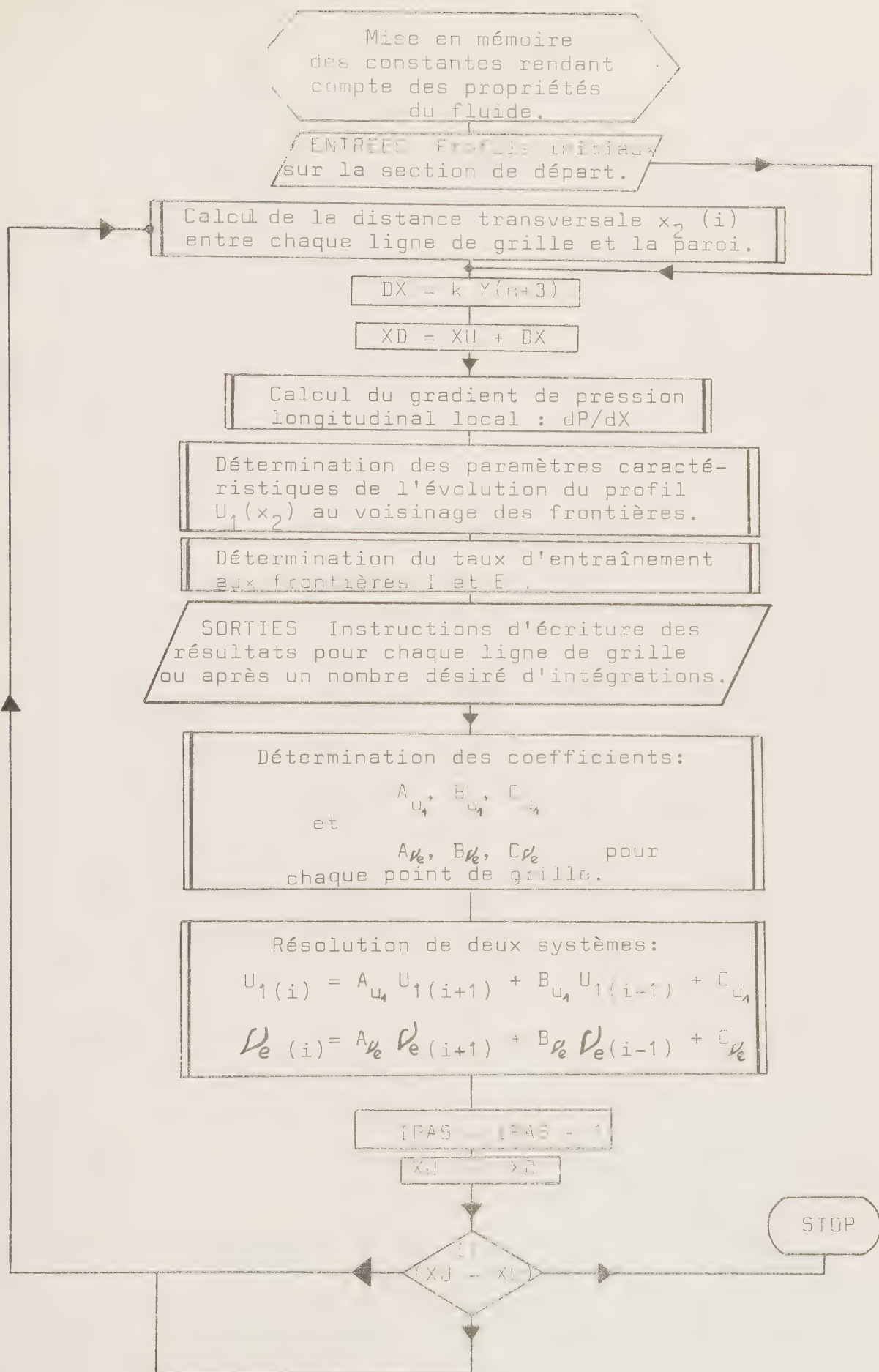


Fig. 6 Organigramme général

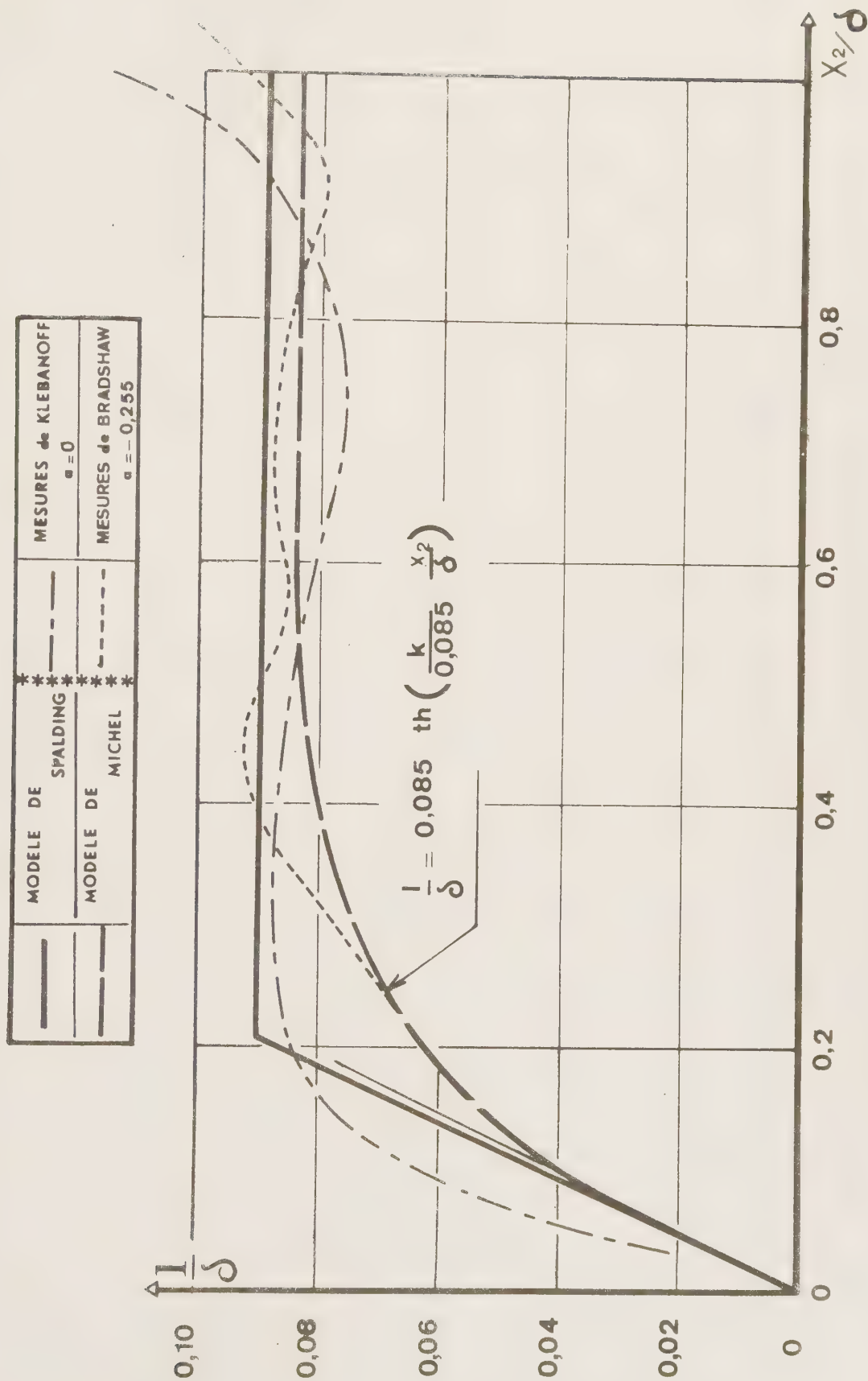


Fig. 7 Représentations diverses de la longueur de mélange.

$$\frac{U_1}{U_0} \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^m \quad U_0 \approx 33 \text{ m/s}$$

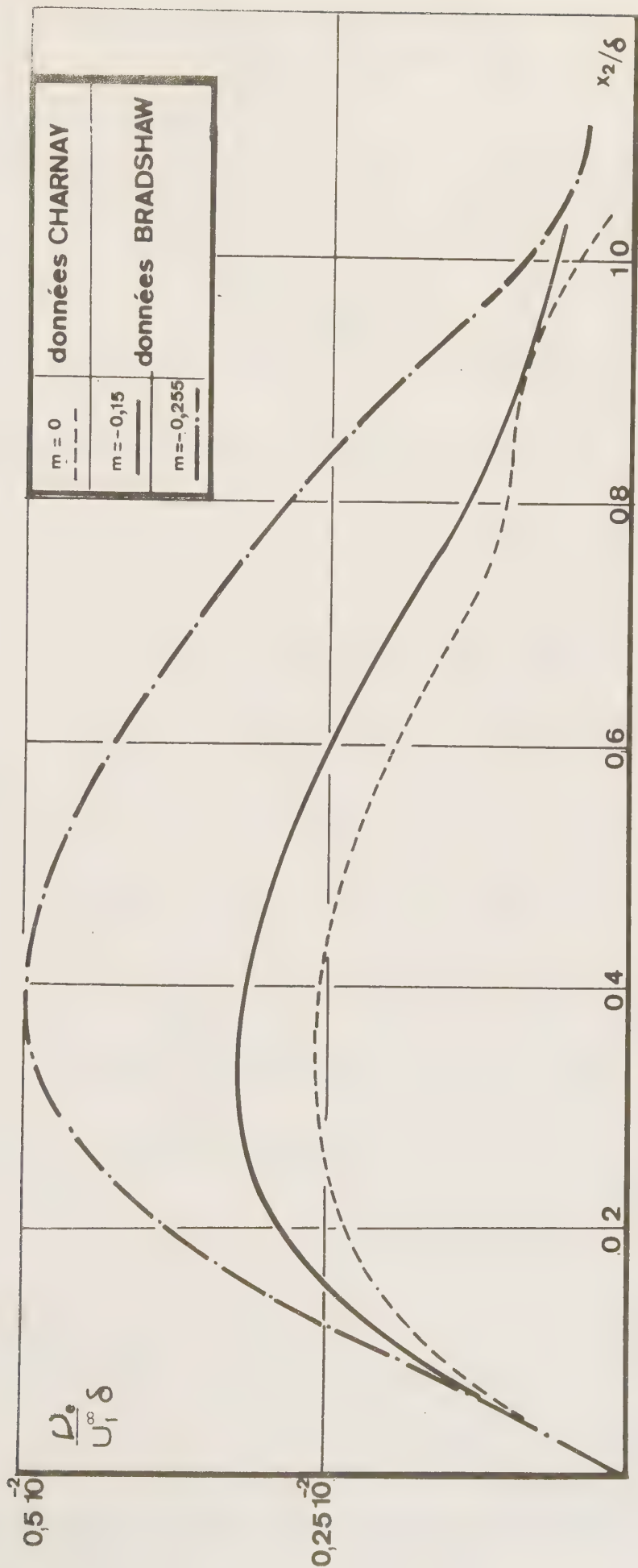
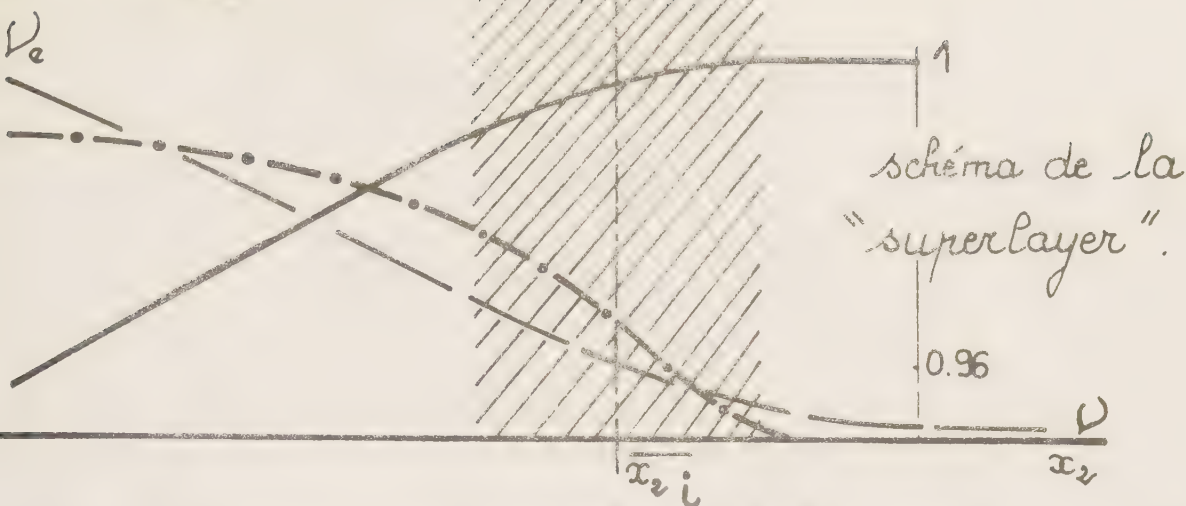


Fig. 8 Profils sans dimension de viscosité effective introduits à la section de départ du calcul pour les différents gradients de pression positifs mentionnés.

Fig. 8 bis (a)



1 structure de l'interface calculée par l'équation initiale de V_e

mouvement secondaire dû aux lentes ondulations de l'interface :

U_1^∞



TRANSPORT Modulation

$$U_1^\infty \frac{\partial V_e}{\partial x_2}$$

Convection

$$\left(\frac{x_2}{\delta}\right)^n$$

effet de frontière

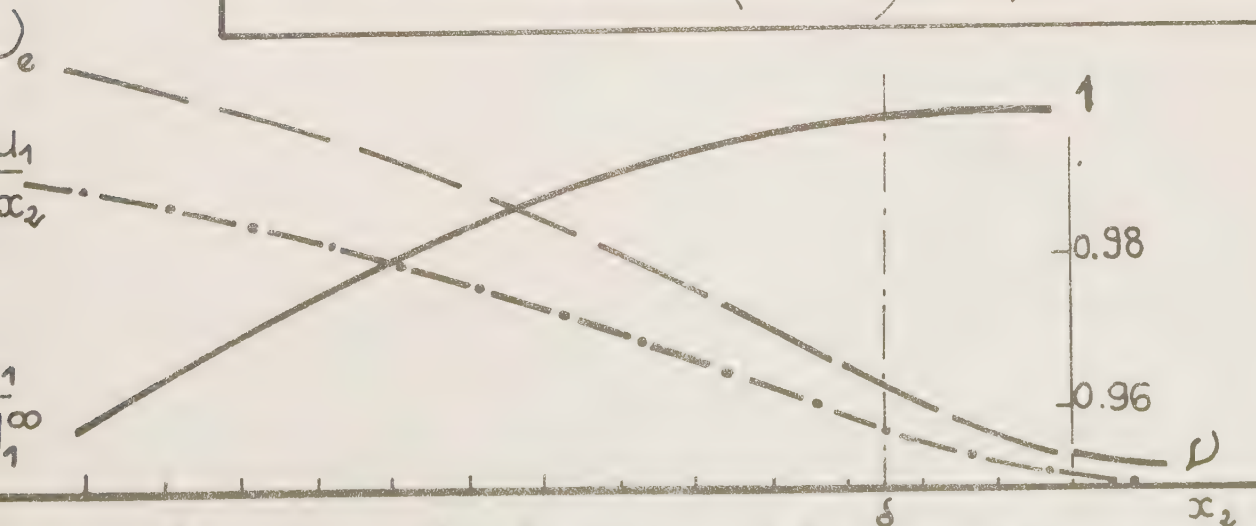
Reynolds

caract.

$$\frac{V_{e \max}}{U_1^\infty \delta}$$

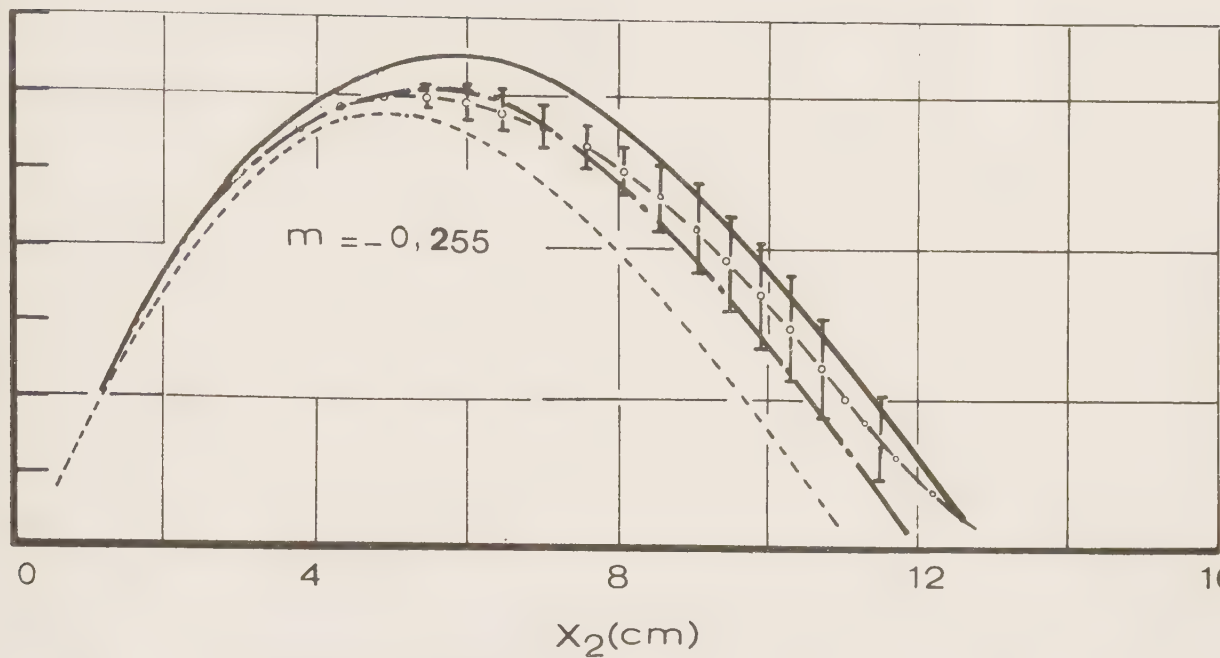
Eaux internes de viscosité.

$$D\left(\frac{x_2}{\delta}, x_1\right) \frac{\partial V_e}{\partial x_2} \equiv A_\varepsilon \left(\frac{V_{e \max}}{U_1^\infty \delta}\right)^2 \left(\frac{x_2}{\delta}\right)^2 U_1^\infty \frac{\partial V_e}{\partial x_2}$$



2 Structure de la frontière calculée en introduisant l'équation $D\left(\frac{x_2}{\delta}, x_1\right) \frac{\partial V_e}{\partial x_2} \equiv A_\varepsilon \left(\frac{V_{e \max}}{U_1^\infty \delta}\right)^2 \left(\frac{x_2}{\delta}\right)^2 U_1^\infty \frac{\partial V_e}{\partial x_2}$ dans l'équation de V_e

$$B = 0.8$$



-----	-----	-----	-----
$A_E = 0$	$A_E = 420$	$A_E = 840$	calcul de
CALCUL NUMERIQUE			$\frac{v}{\mu} = \frac{z}{f(u_1)} \cdot \frac{1}{\frac{\partial u_1 / \mu}{\partial x_1 / \delta}} \cdot \frac{u_1 \delta}{\nu}$ à partir des mesures de BRADSHAW

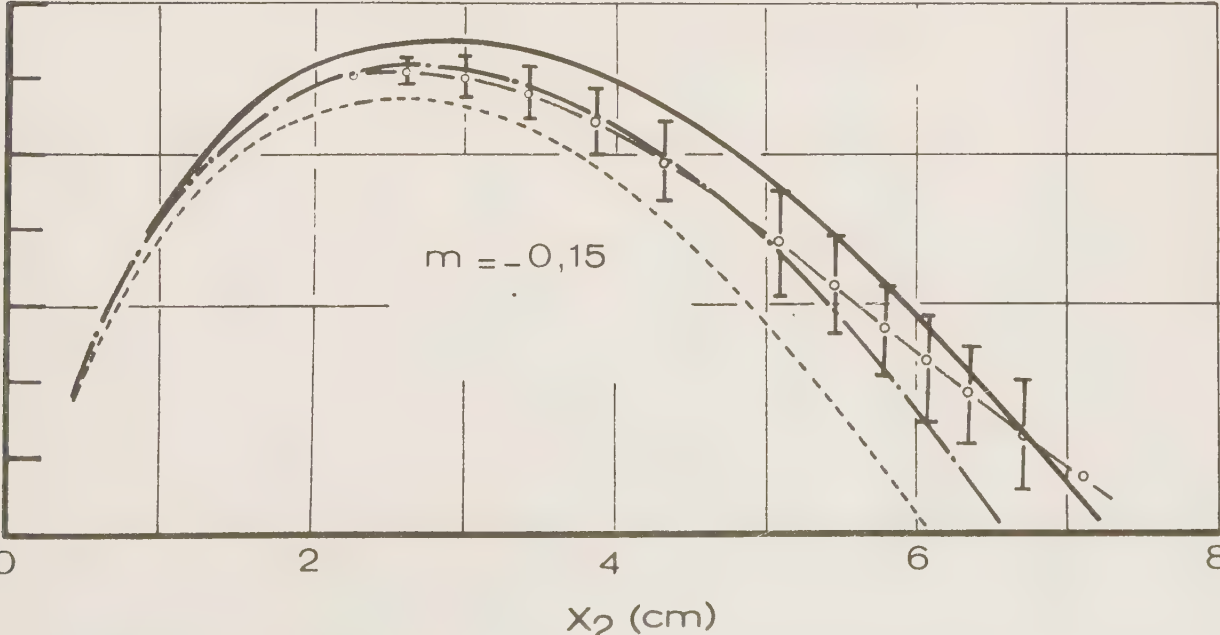


Fig. 8 bis_b : Influence du terme $A_E (x_2/\delta)^2 (v_{e\max}/U_1^\infty \delta)^2 U_1^\infty \frac{\partial v_e}{\partial x_2}$ sur le comportement de la viscosité effective.

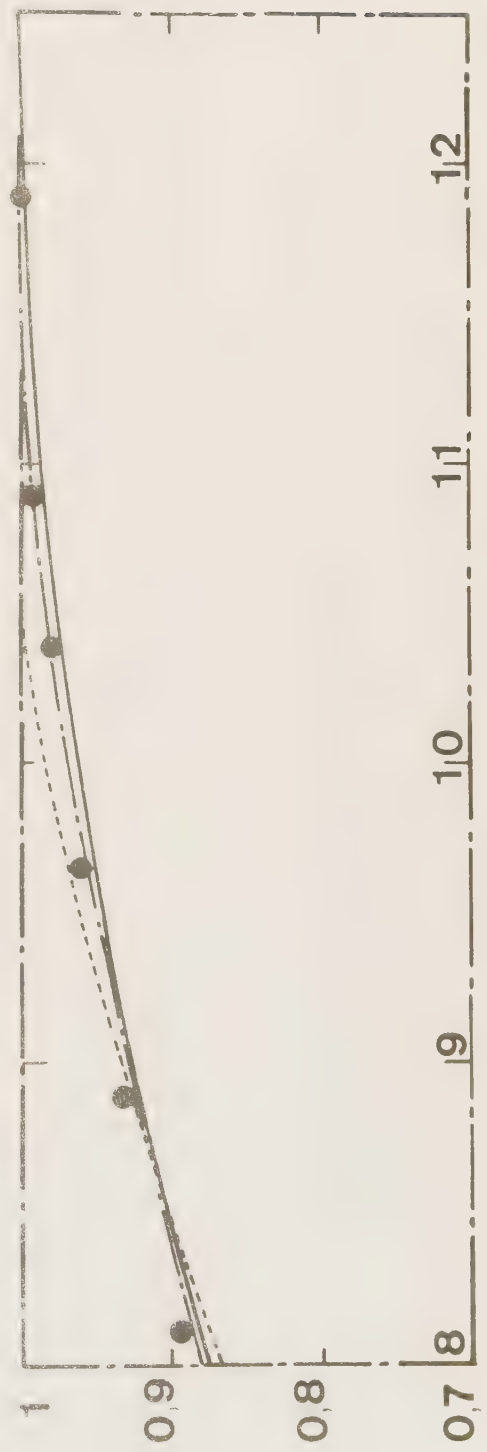
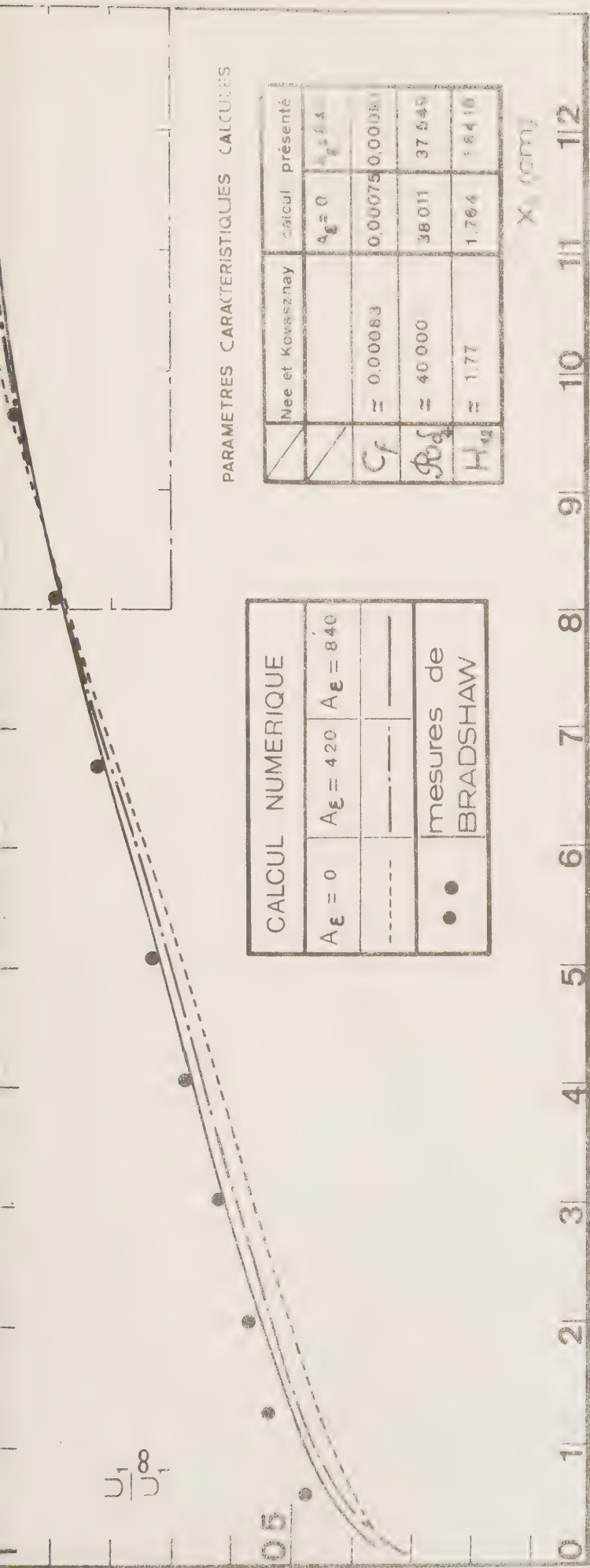


Fig. 8 ter : Influence du terme $A_E (x_2/\delta)^2 (V_{e\max}/u_1^{\infty}\delta)^2 u_1^{\infty} \partial V_e / \partial x_2$ sur le profil de vitesse moyenne. $m = -0,255$ $x_1 = 2,11$ m.

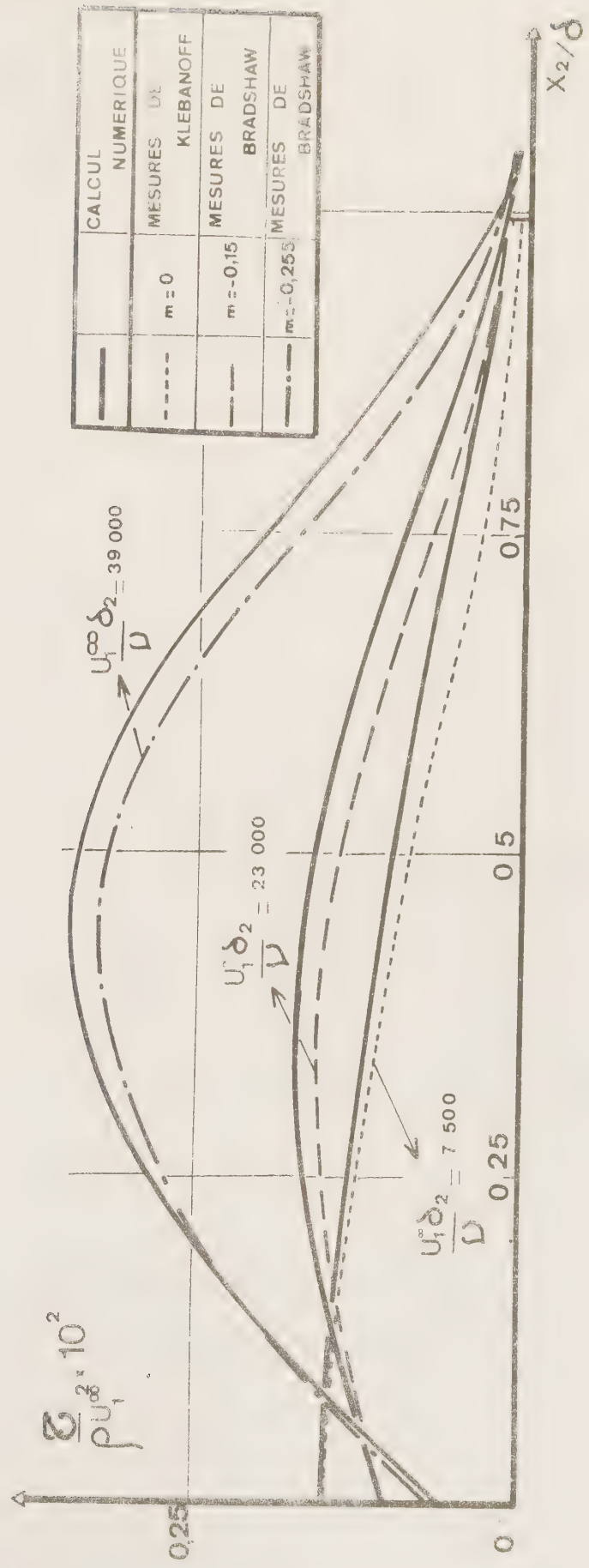


Fig. 9 Profils des tensions réduites pour les différents gradients de pression positifs mentionnés.

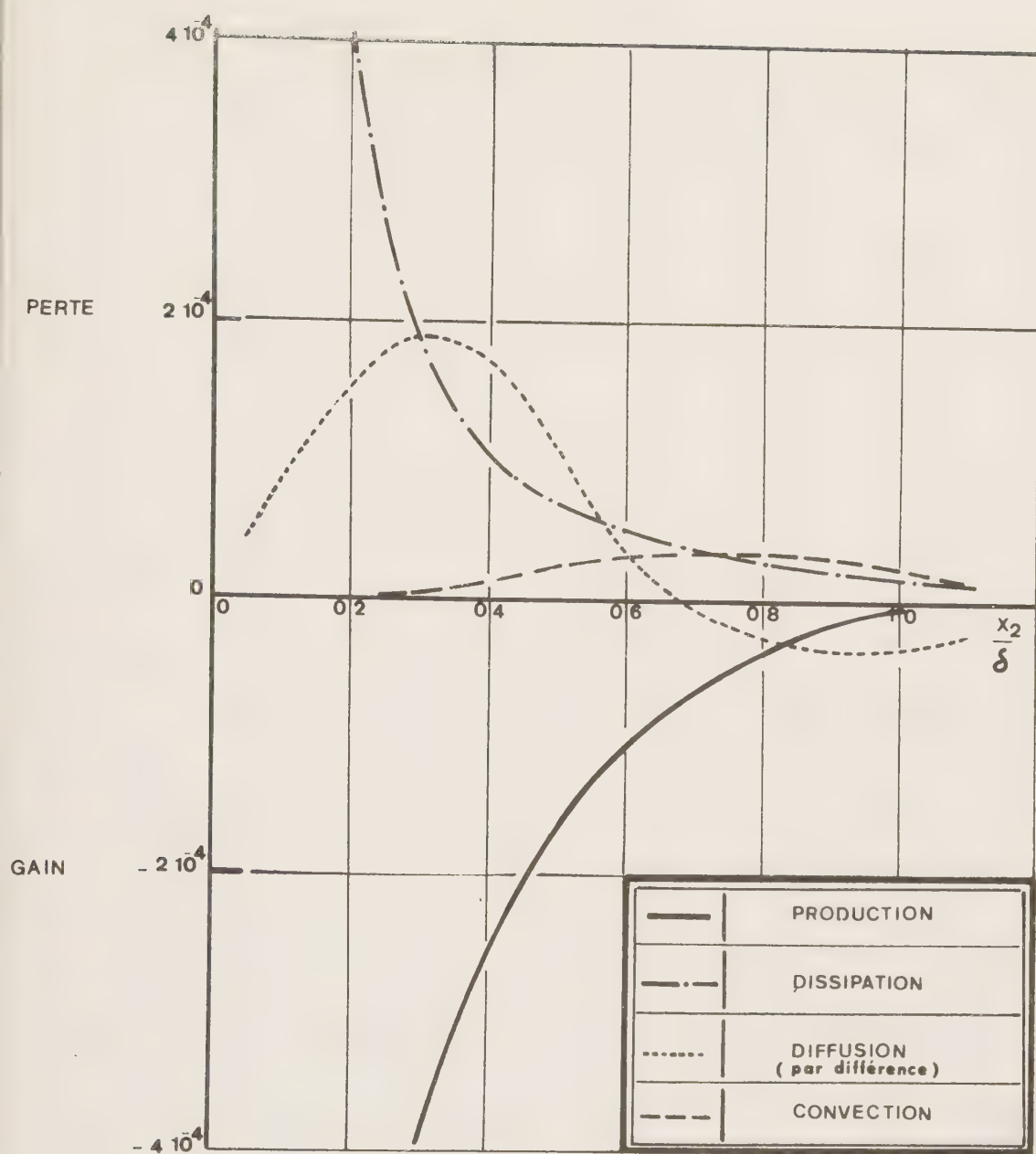


Fig. 10 BALANCE D'ENERGIE cinétique
d'après Klebanoff (18)

m. O

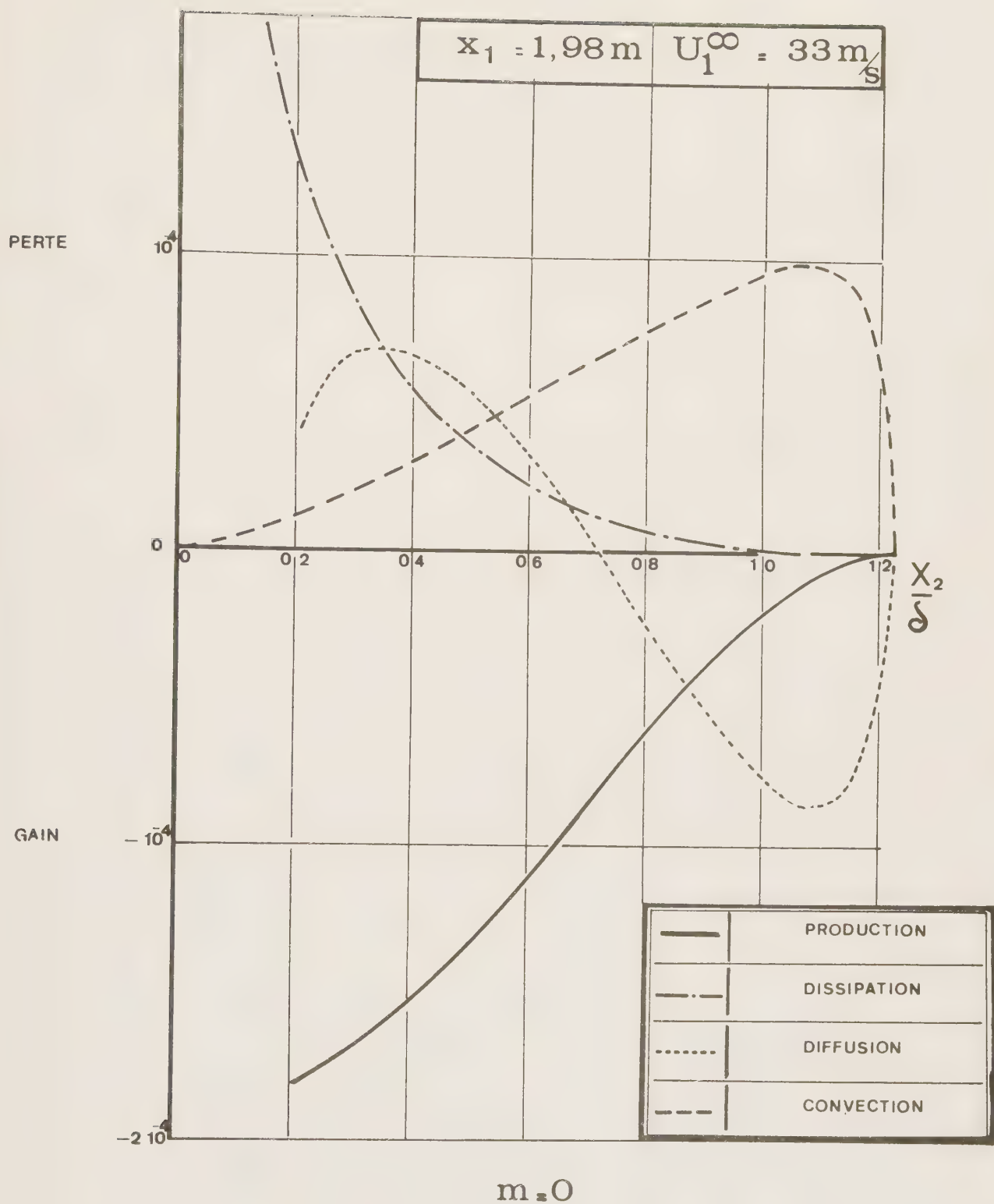
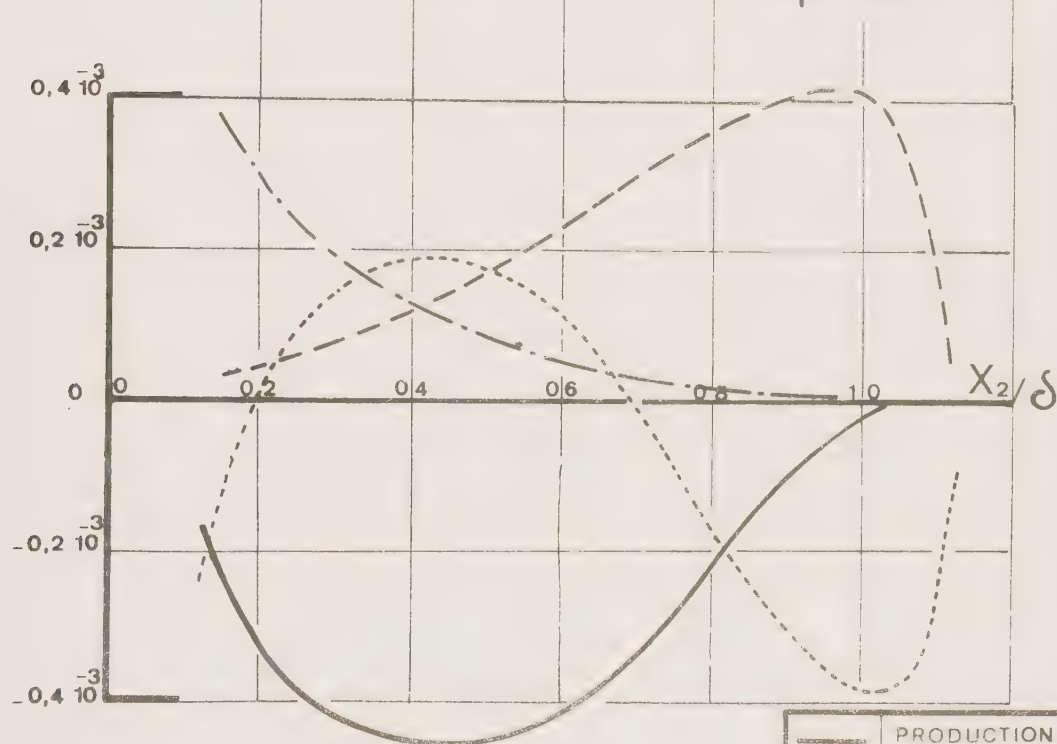
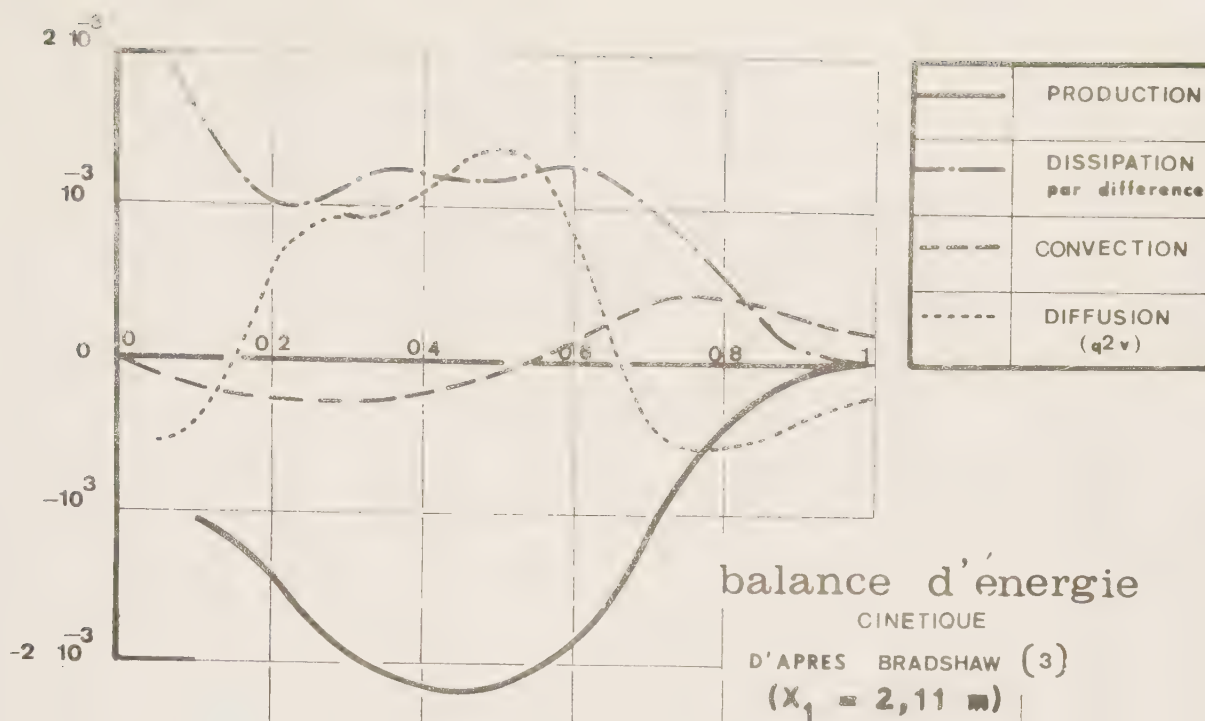


Fig. 11 Bilan des termes relatifs à l'équation
 de comportement de D_e .



balance DES termes

relatifs à v_e

($X_1 = 2,11 \text{ m}$)

Fig. 12

$m = 0,255$

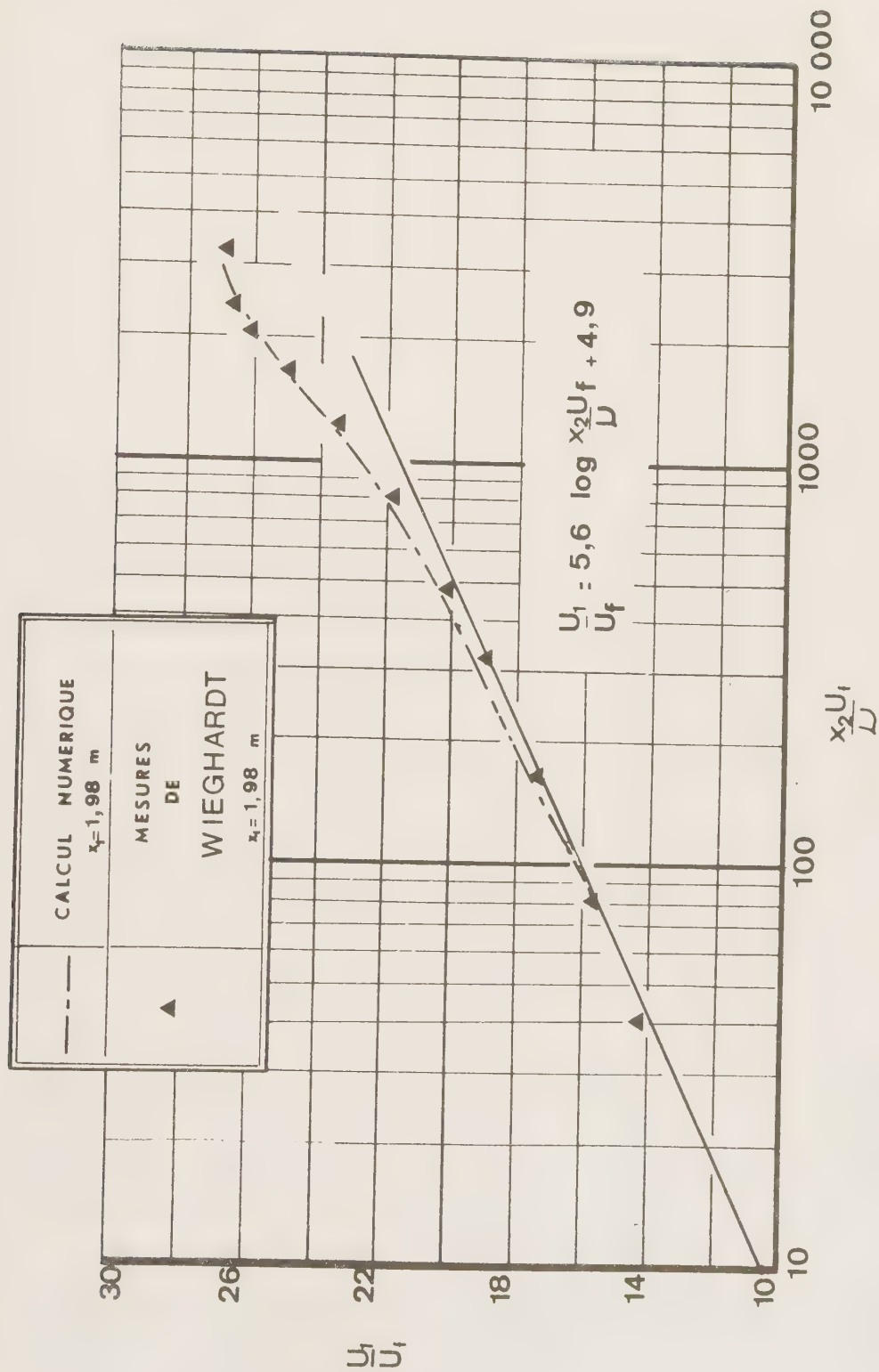


Fig. 13 Développement d'une couche limite sur plaque plane sans gradient de pression extérieur - Représentation logarithmique du profil de vitesse moyenne. $U_1^0 = 33 \text{ m/s}$

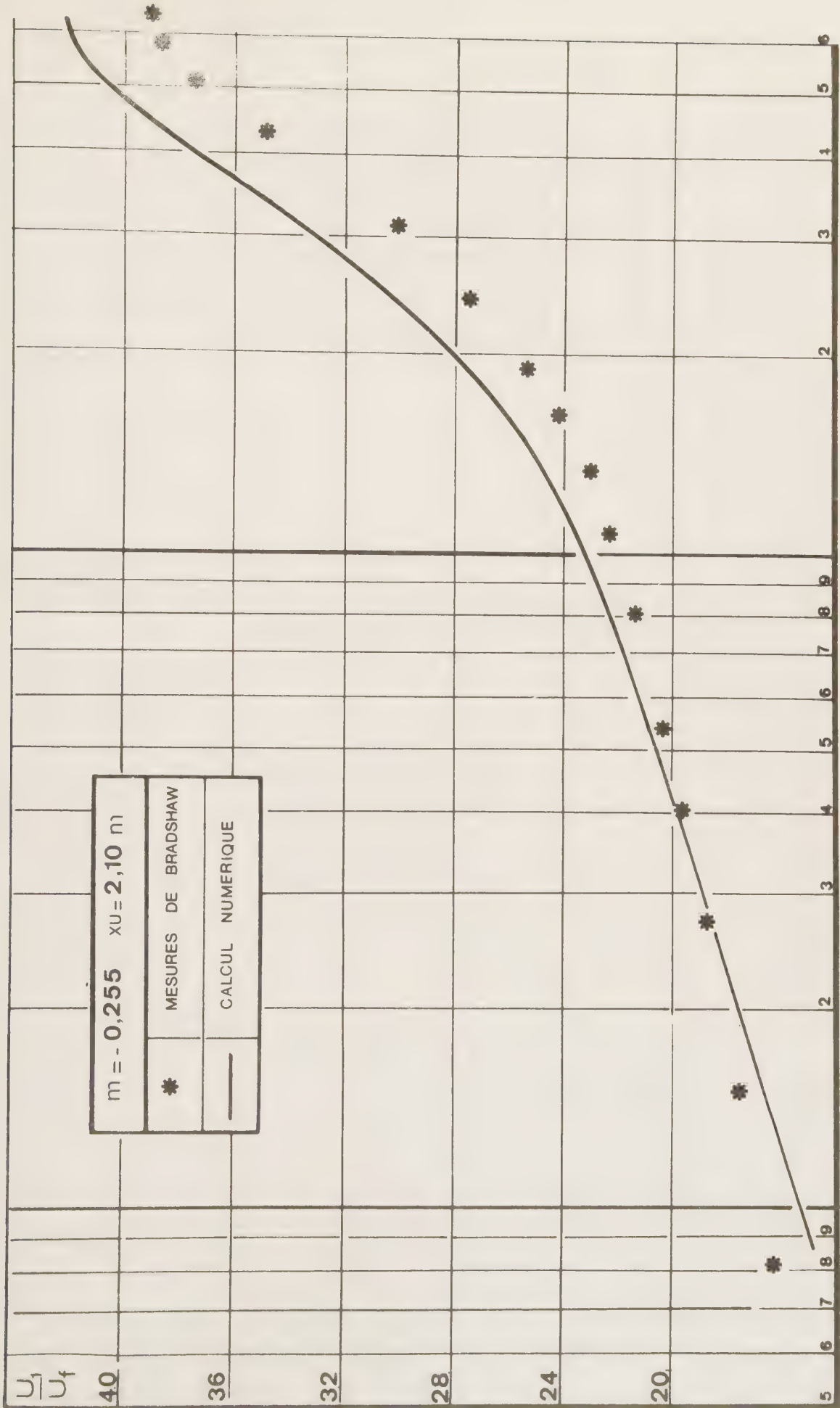


Fig. 14 Développement d'une couche limite sur plaque plane avec gradient de pression positif extérieur - Représentation logarithmique du profil de vitesse moyenne. $U_f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_1^\infty$
 $C_f = 0.246 R_d^{-0.268} 10^{-0.678 H_{12}}$

f

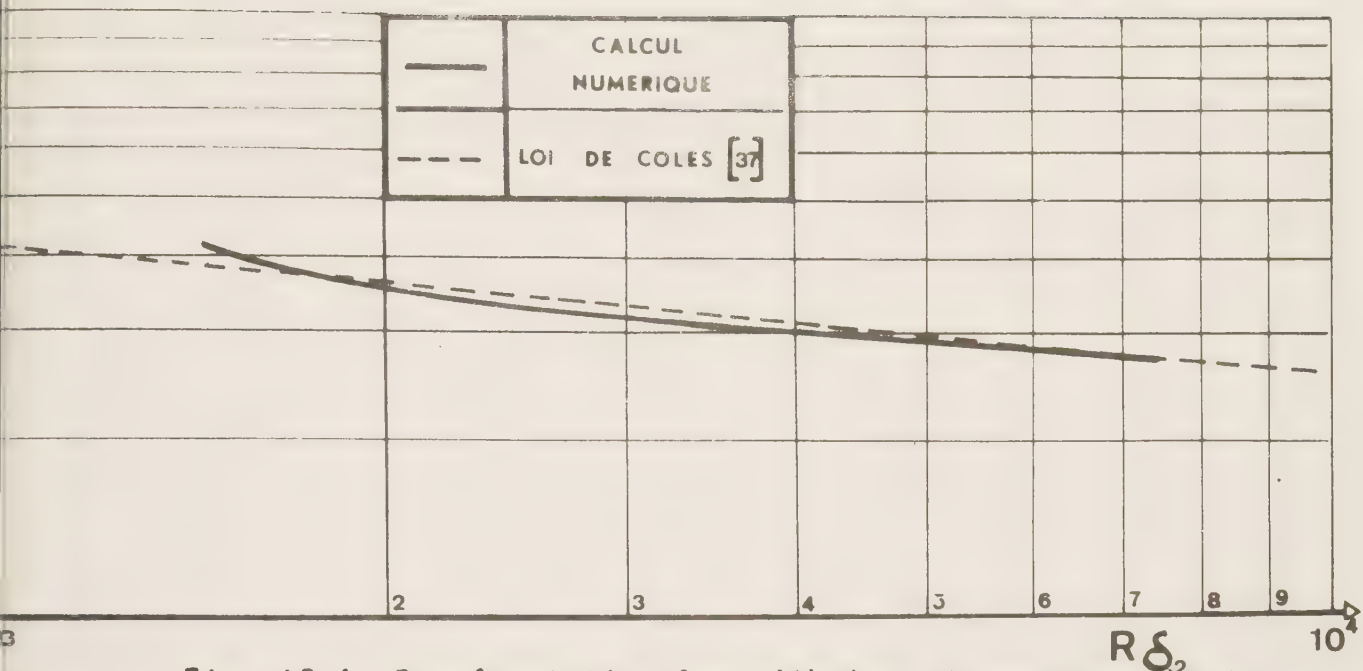


Fig. 15 A Représentation logarithmique du coefficient de frottement ($U_1^\infty = 33 \text{ m/s}$ $dP/dX_1 = 0$).

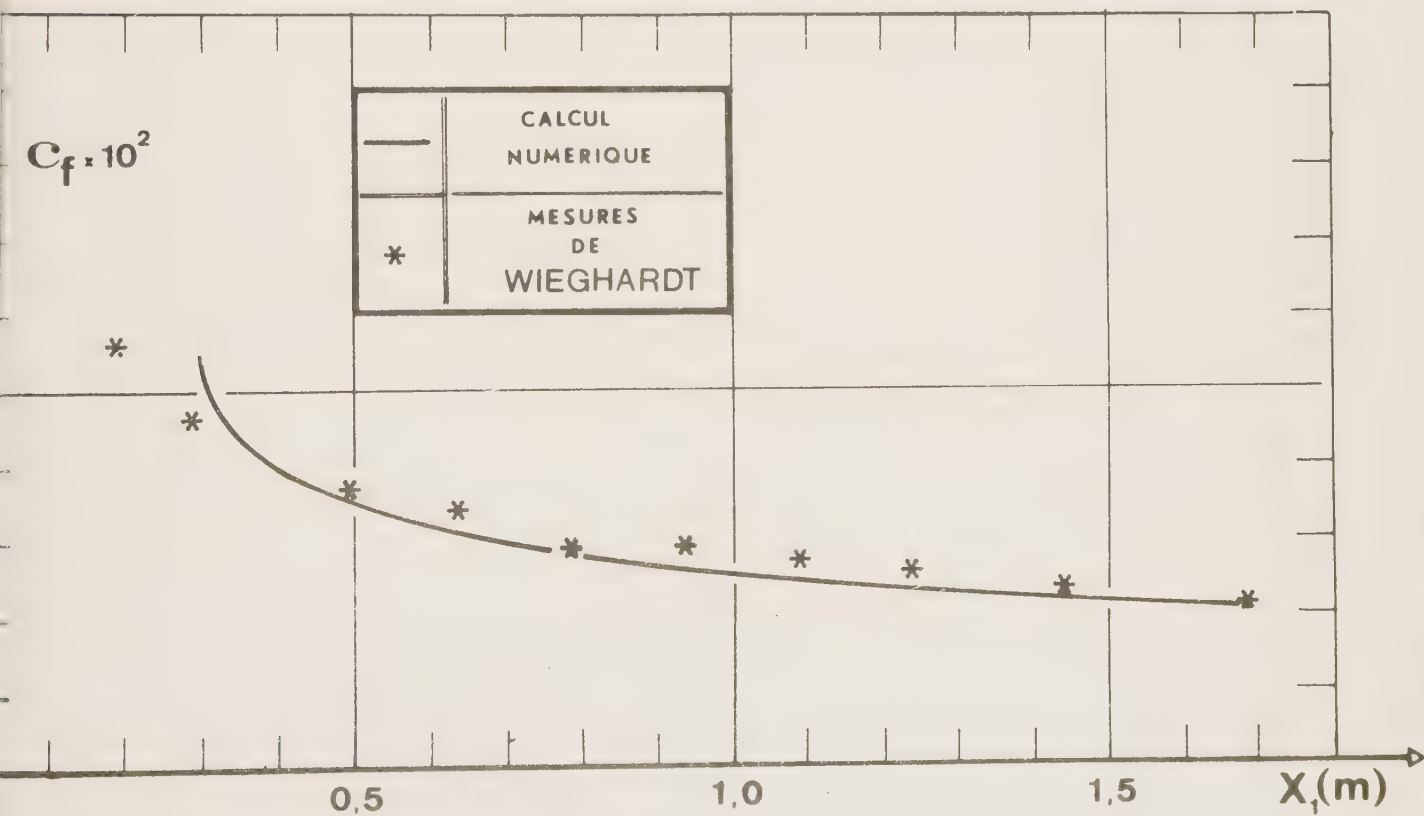


Fig. 15 B Evolution du coefficient de frottement le long de la plaque ($U_1^\infty = 33 \text{ m/S}$ $dP/dX_1 = 0$).

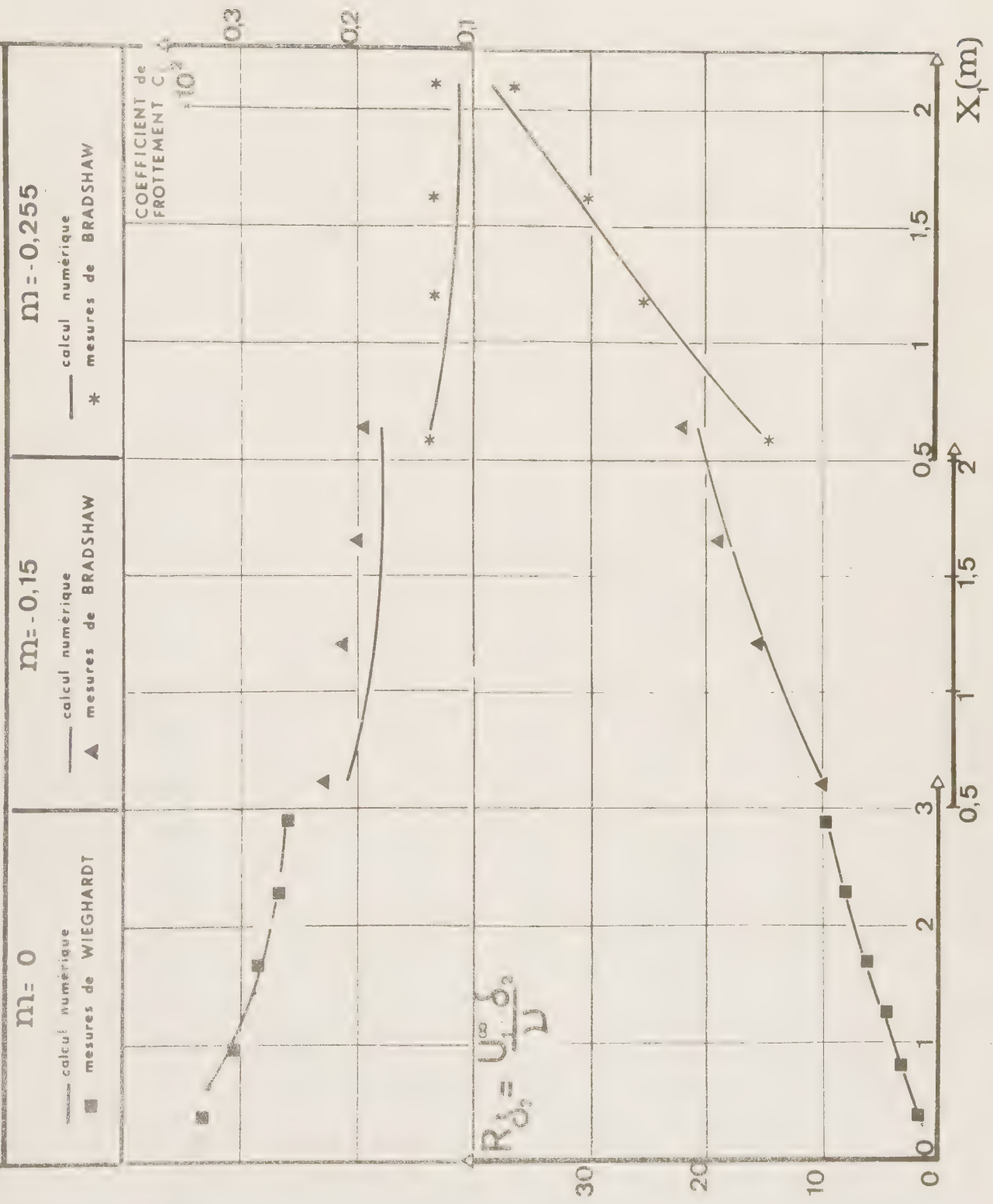


Fig. 16

	CALCUL	NUMERIQUE
—		
■	m = 0	δ_{990} mesures WIEGHARDT
●	m = -0,15	δ_{995} mesures BRADSHAW
✱	m = -0,255	

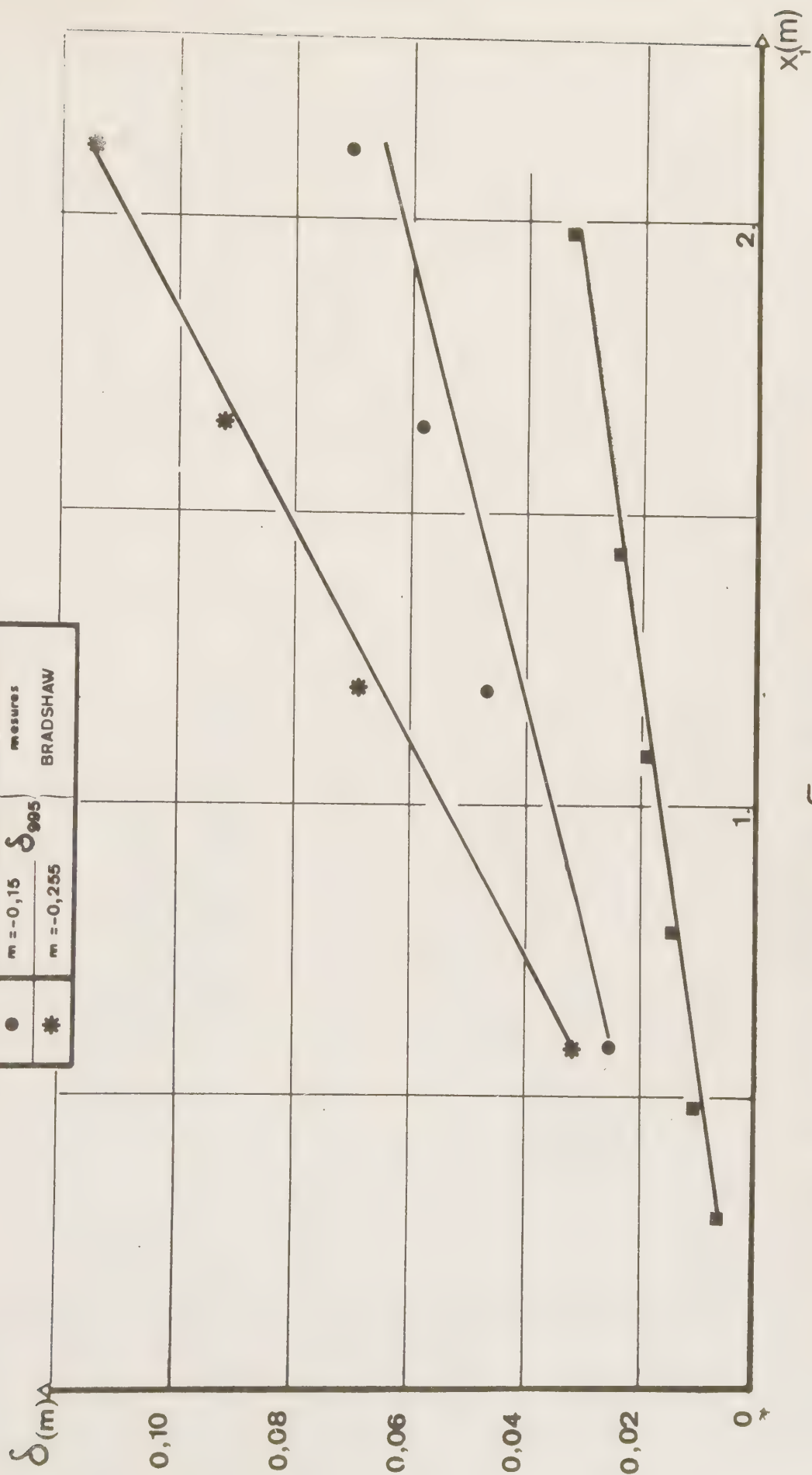


Fig. 17 Evolution de l'épaisseur $\delta(x_1)$ de la couche limite pour les différents gradients de pression positifs mentionnés.

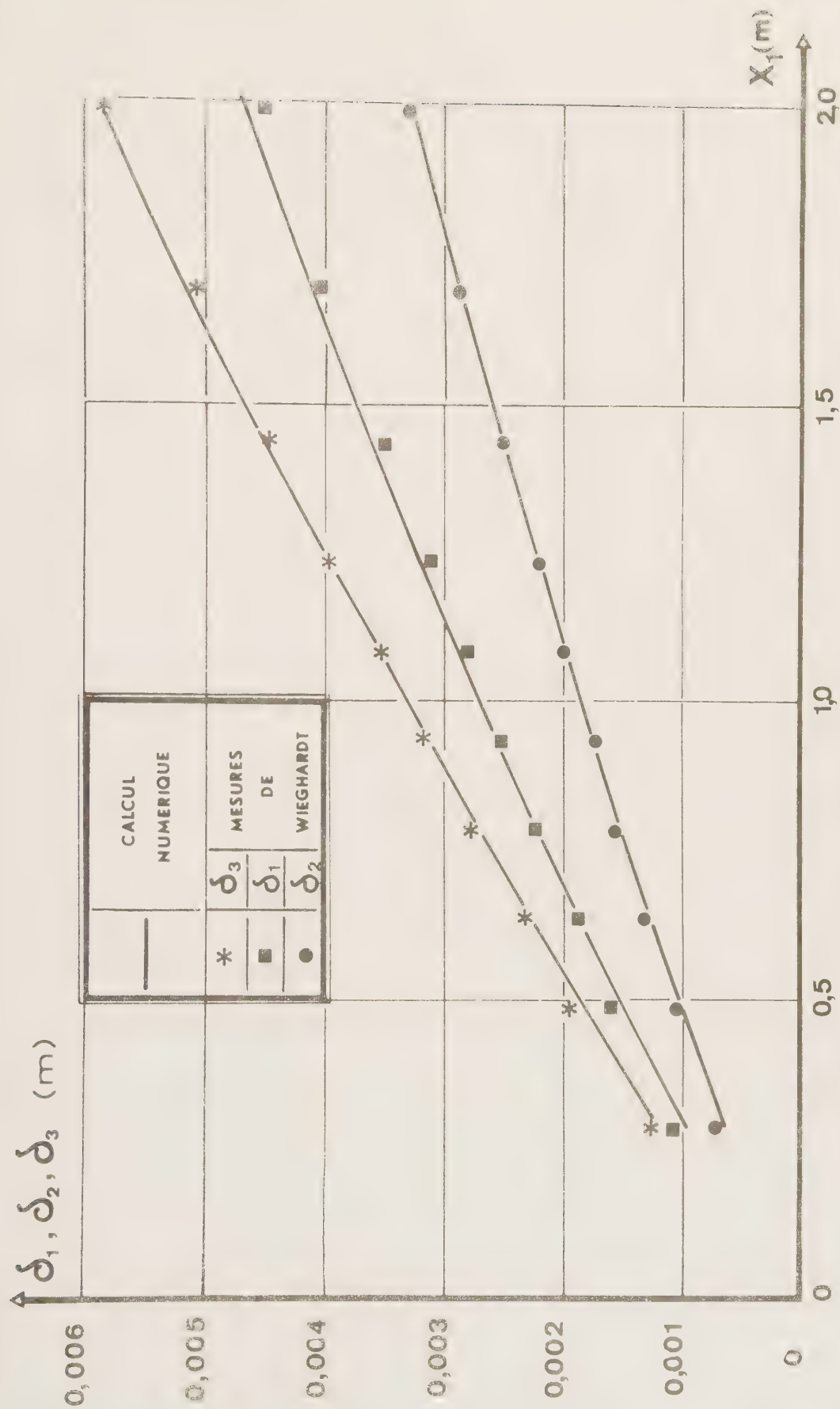


Fig. 18 Evolution des paramètres intégraux caractéristiques de la couche limite ($U_1^\infty = 33 \text{ m/s}$ $dP/dX_1 = 0$).

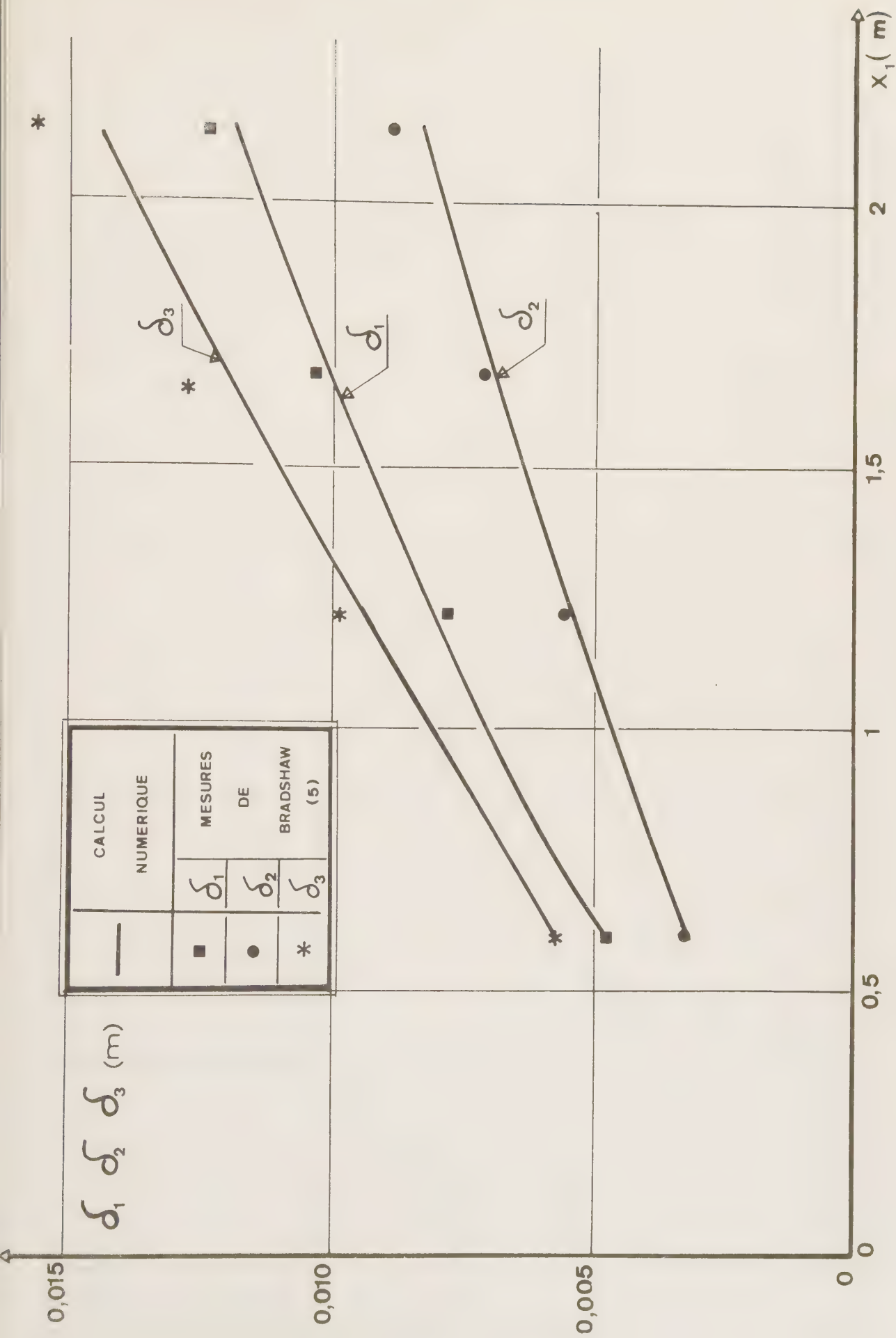


Fig. 19 Evolution des paramètres intégraux caractéristiques de la couche limite ($m = -0,15$).

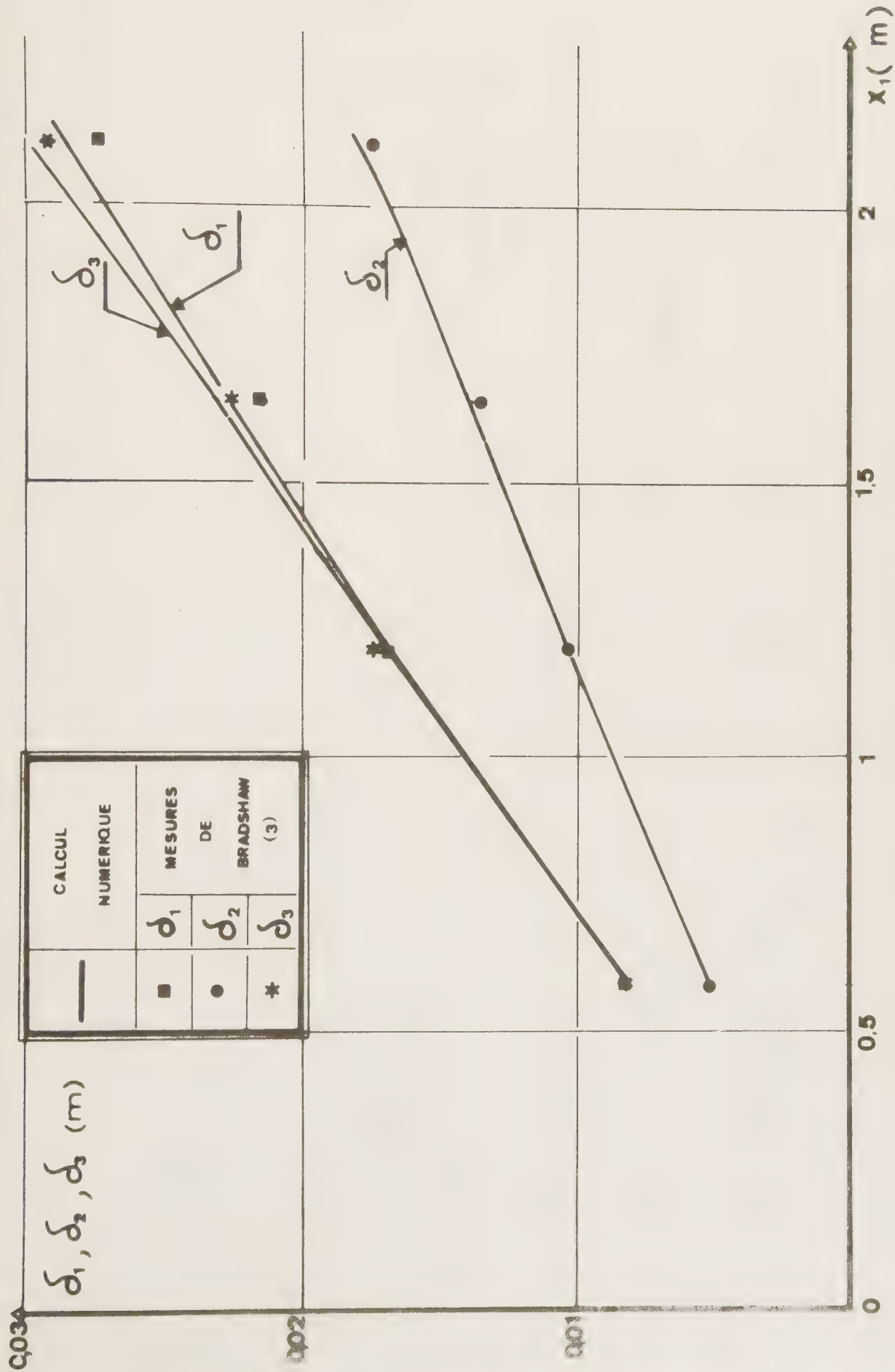


Fig. 20 Evolution des paramètres intégraux caractéristiques de la couche limite ($m = -0,255$).

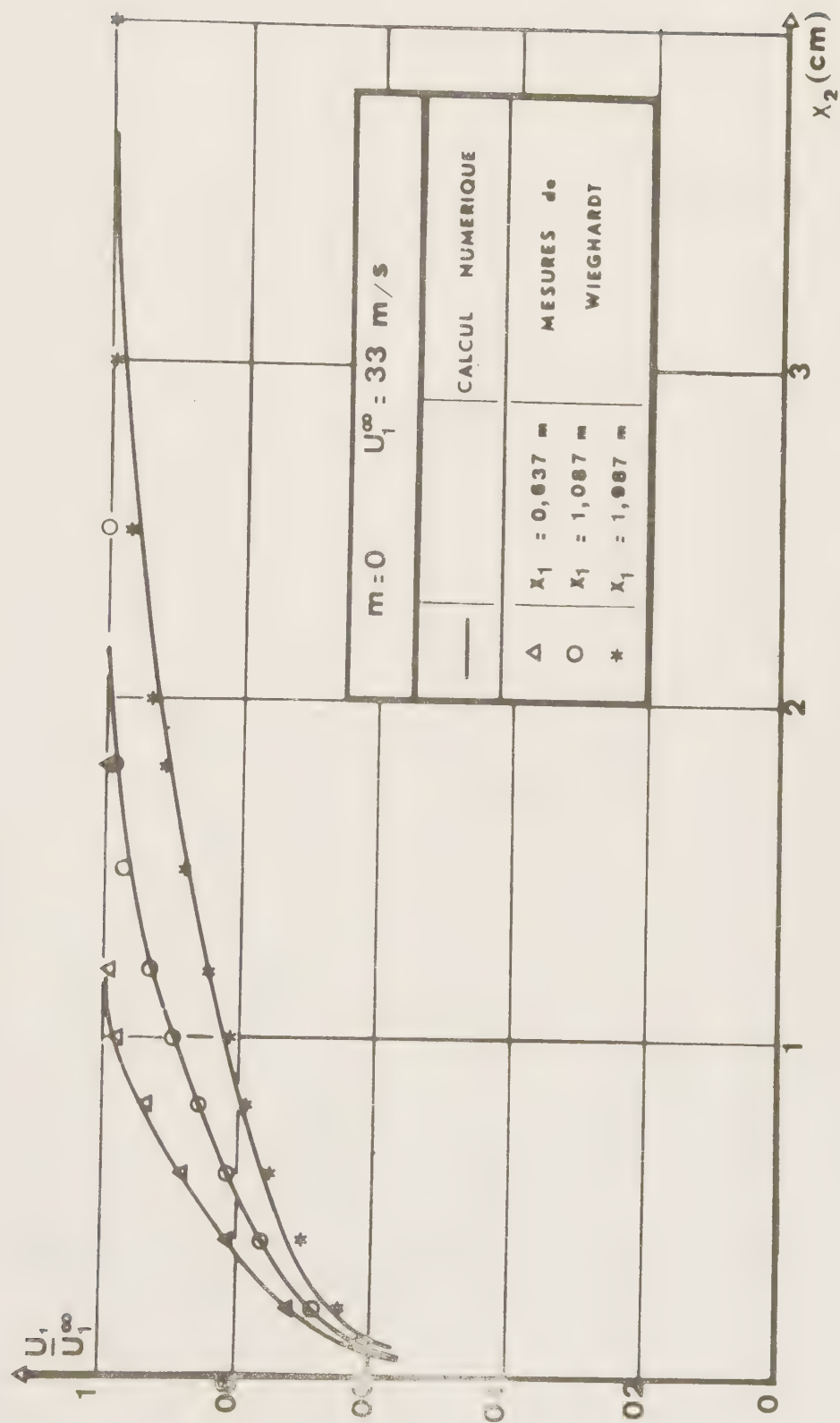


Fig. 21 Evolution dimensionnelle du profil de vitesse moyenne.

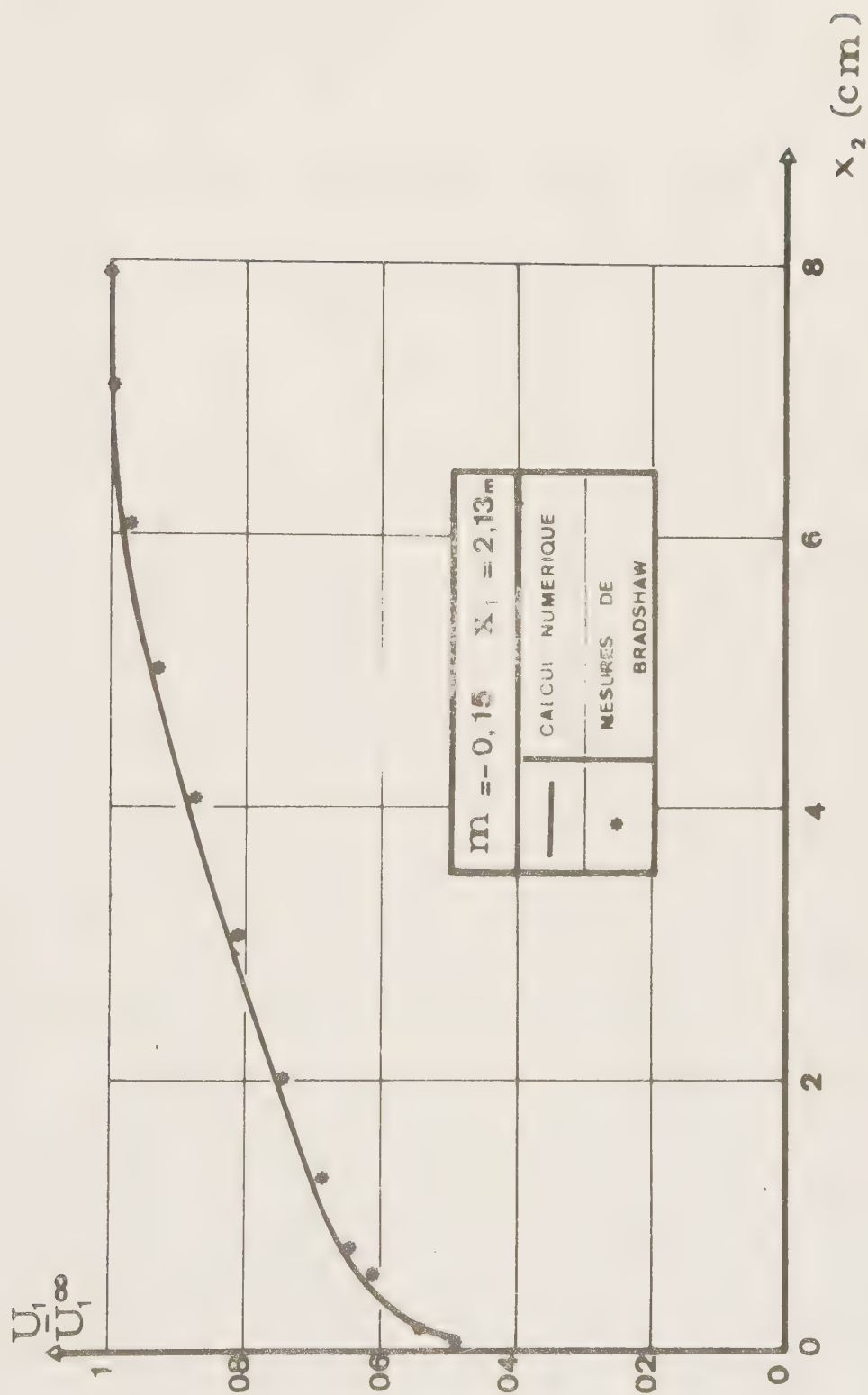


Fig. 22 Profil dimensionnel obtenu à l'abscisse $X_1 = 2,13 \text{ m}$ ($U_1^\infty = 36,35 \text{ m/s}$) à partir d'un profil initial donné à l'abscisse $X_1 = 0,61 \text{ m}$.

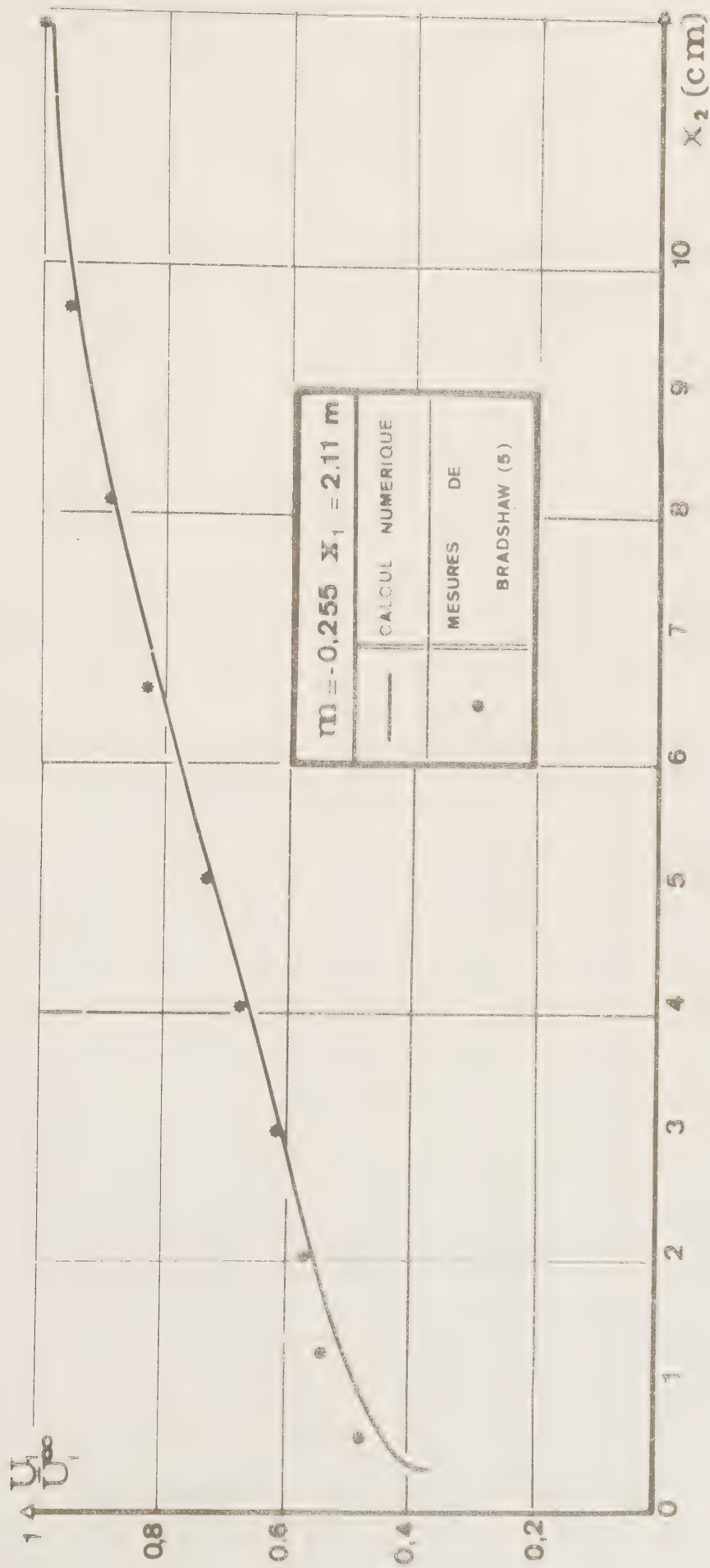


Fig. 23 Profil obtenu à l'abscisse $X_1 = 2,11$ m ($U_1^* = 30,05$ m/s)
à partir d'un profil initial donné à l'abscisse $X_1 = 0,584$ m.

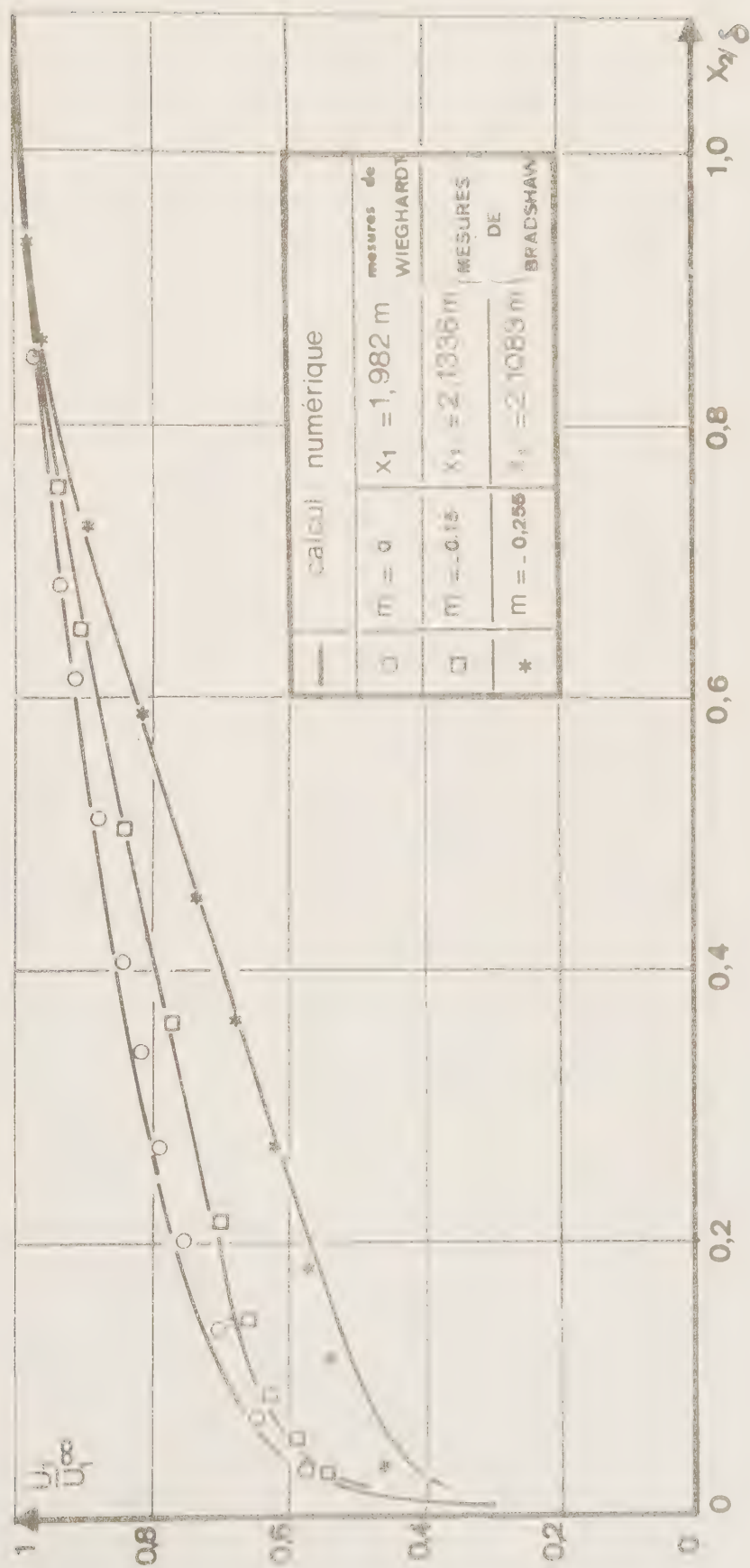


Fig. 24 Profils sans dimension de vitesse moyenne pour les différents gradients de pression positifs mentionnés.

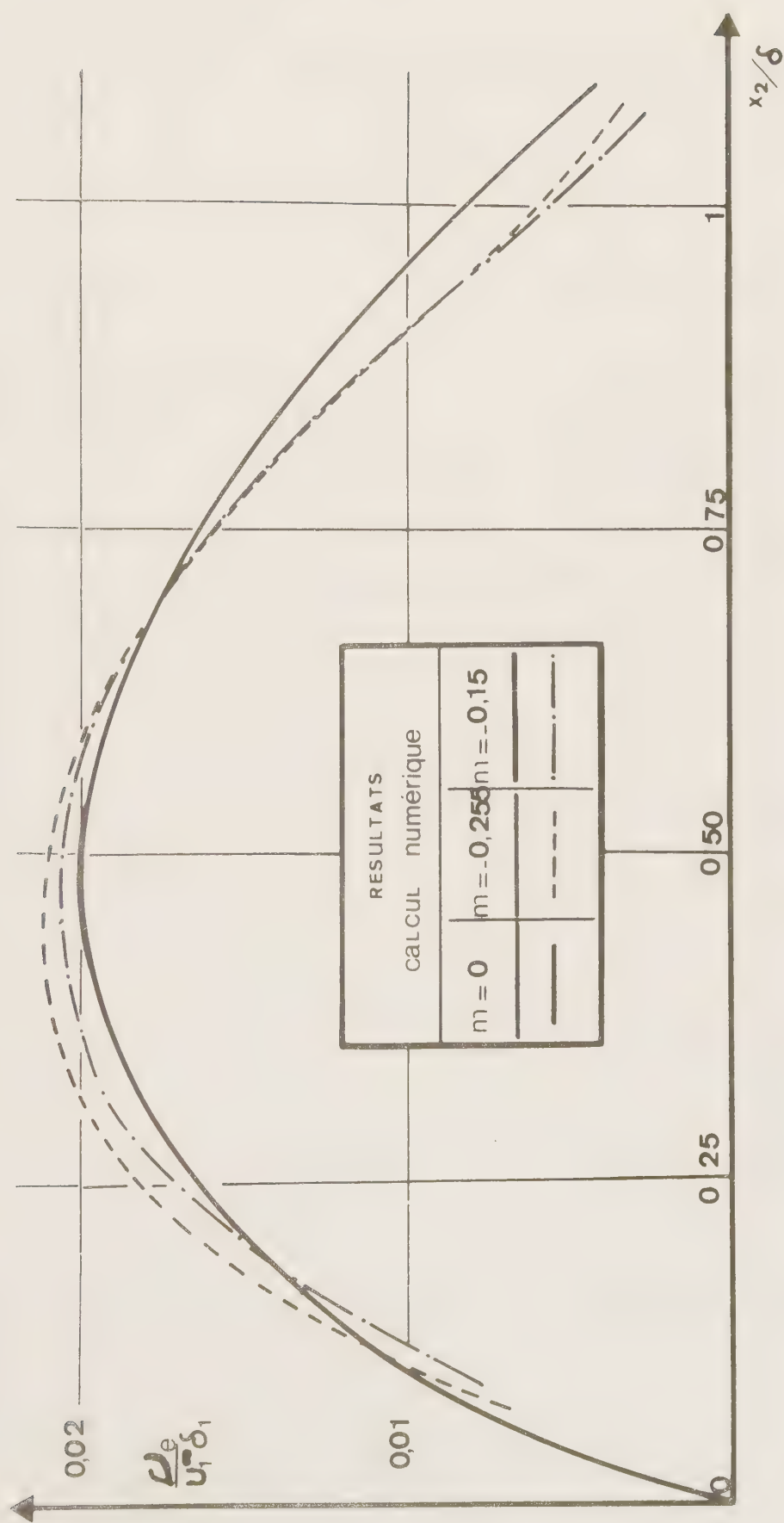
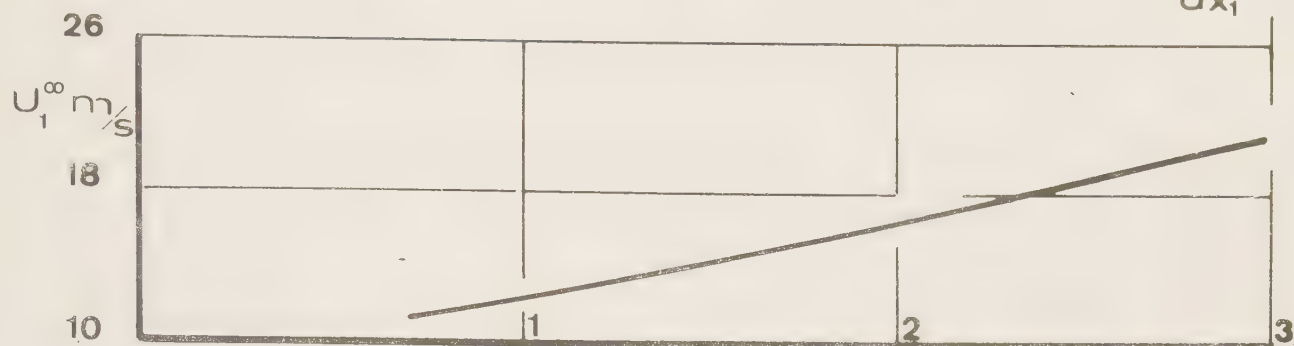


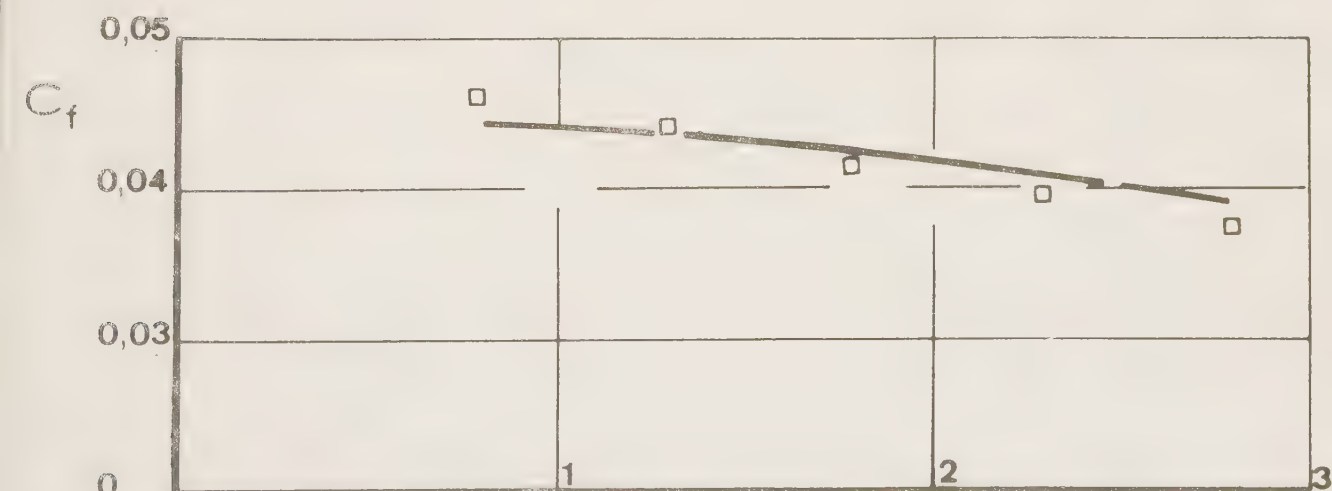
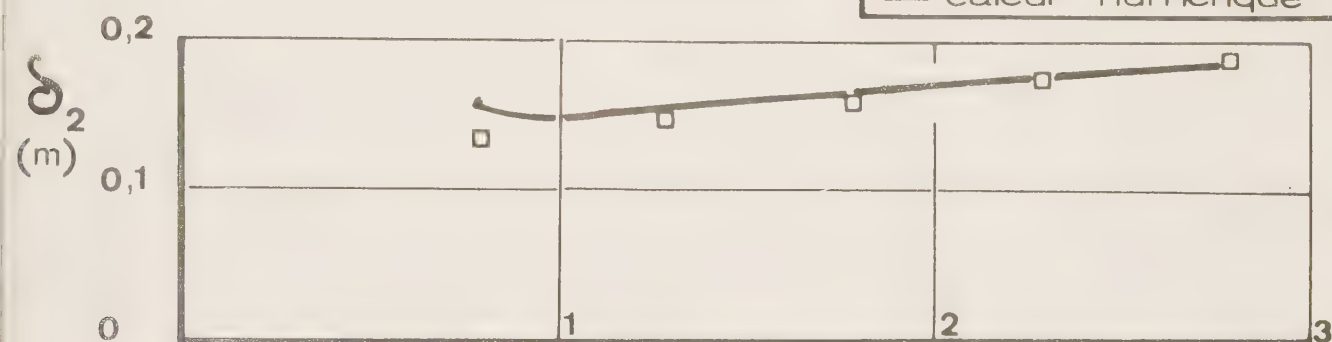
Fig. 25 Profil sans dimension de viscosité turbulente obtenu à $X_1 = 2, 10$ m.

DONNEES [Ludwig Tillmann $\frac{dP}{dx_1} < 0$]



RESULTATS

□ mesures L. Tillmann
— calcul numérique



X_1 (m)

Fig. 26 Evolution de la vitesse extérieure à la couche limite (DONNEES) - évolutions correspondantes de l'épaisseur de quantité de mouvement et du coefficient de frottement en fonction de X_1 .

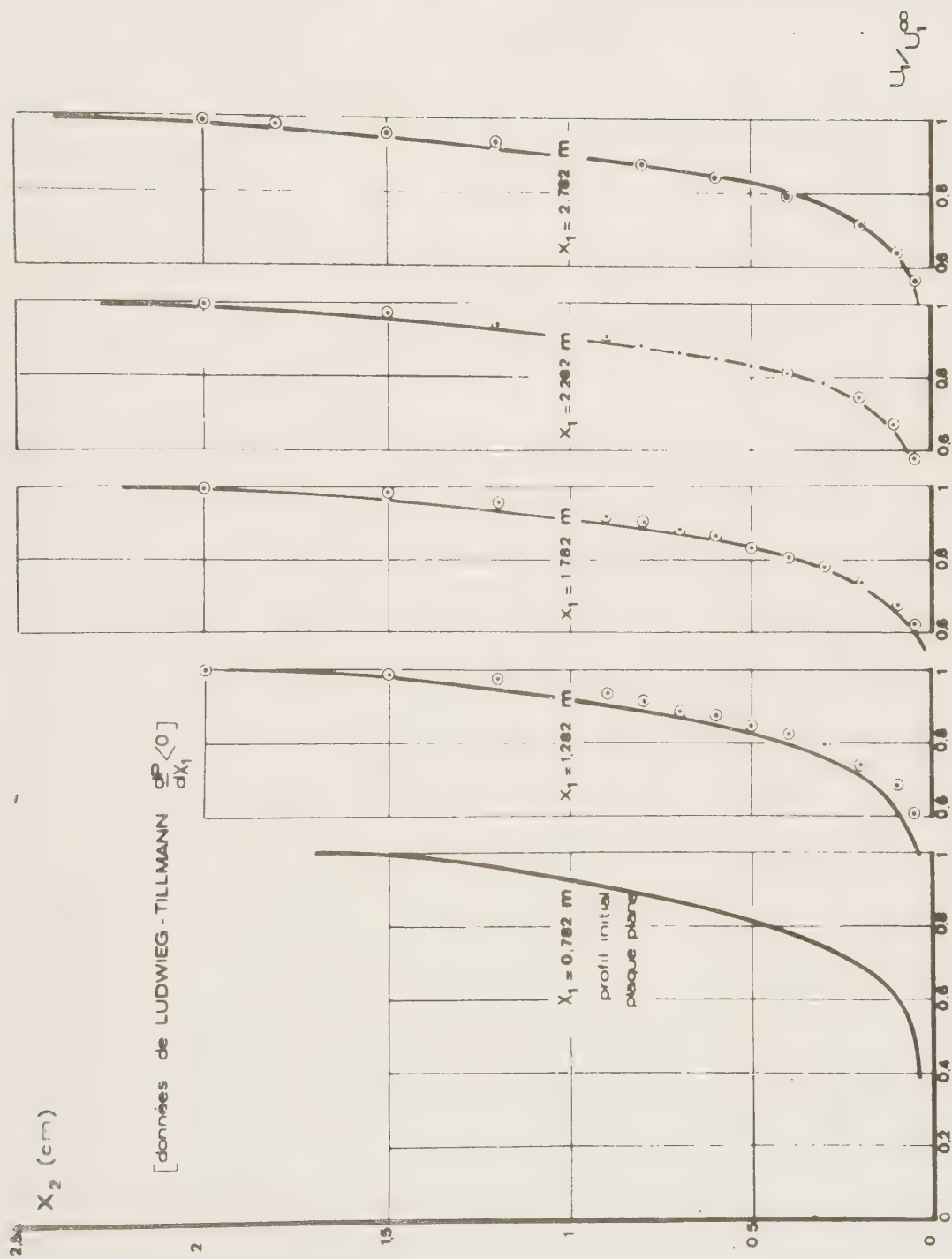


FIG 27
COMPARAISON des PROFILS de VITESSE
MESURES et CALCULES.

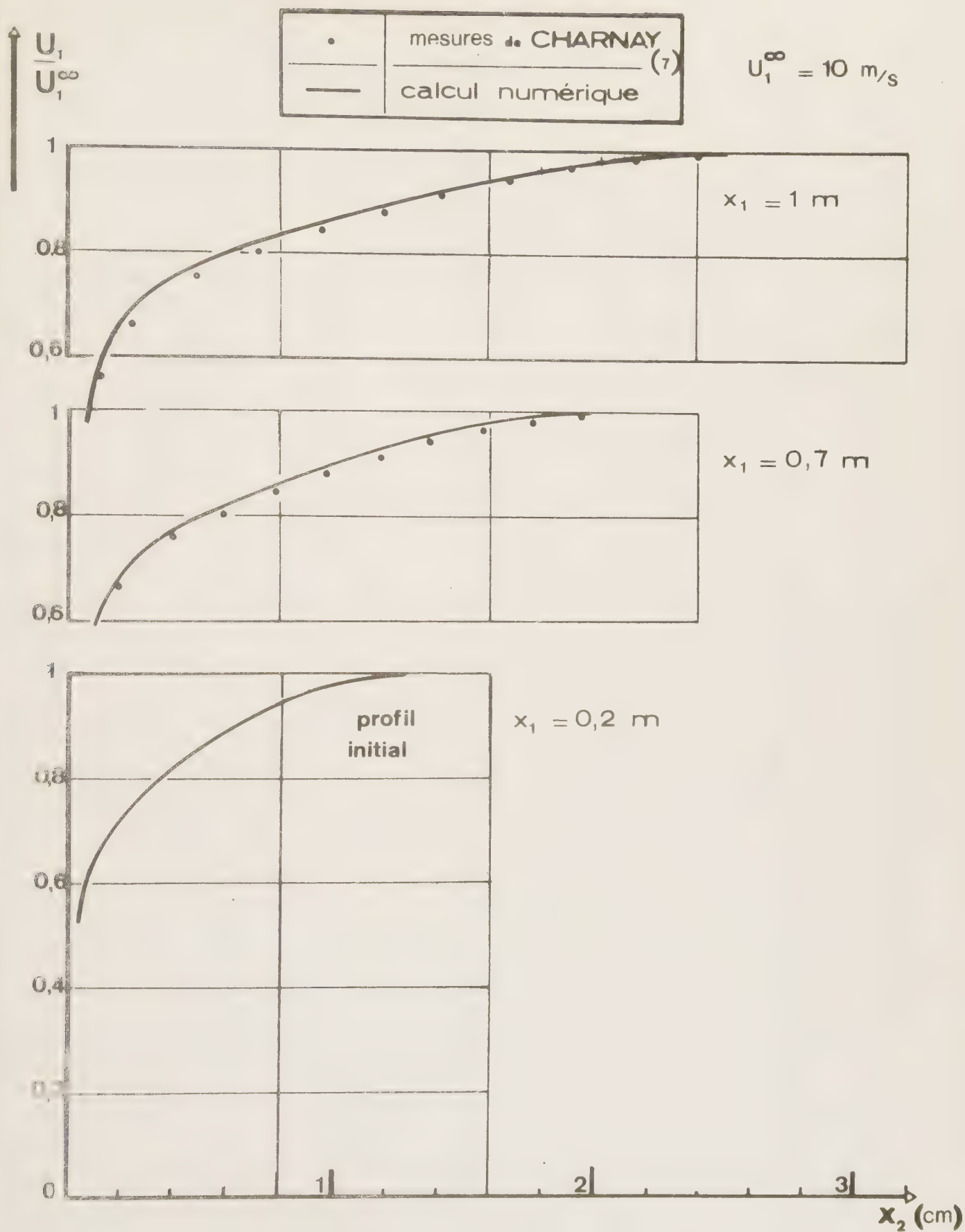


Fig. 28 Evolution dimensionnelle du profil de vitesse moyenne
 Confrontation expérimentale.

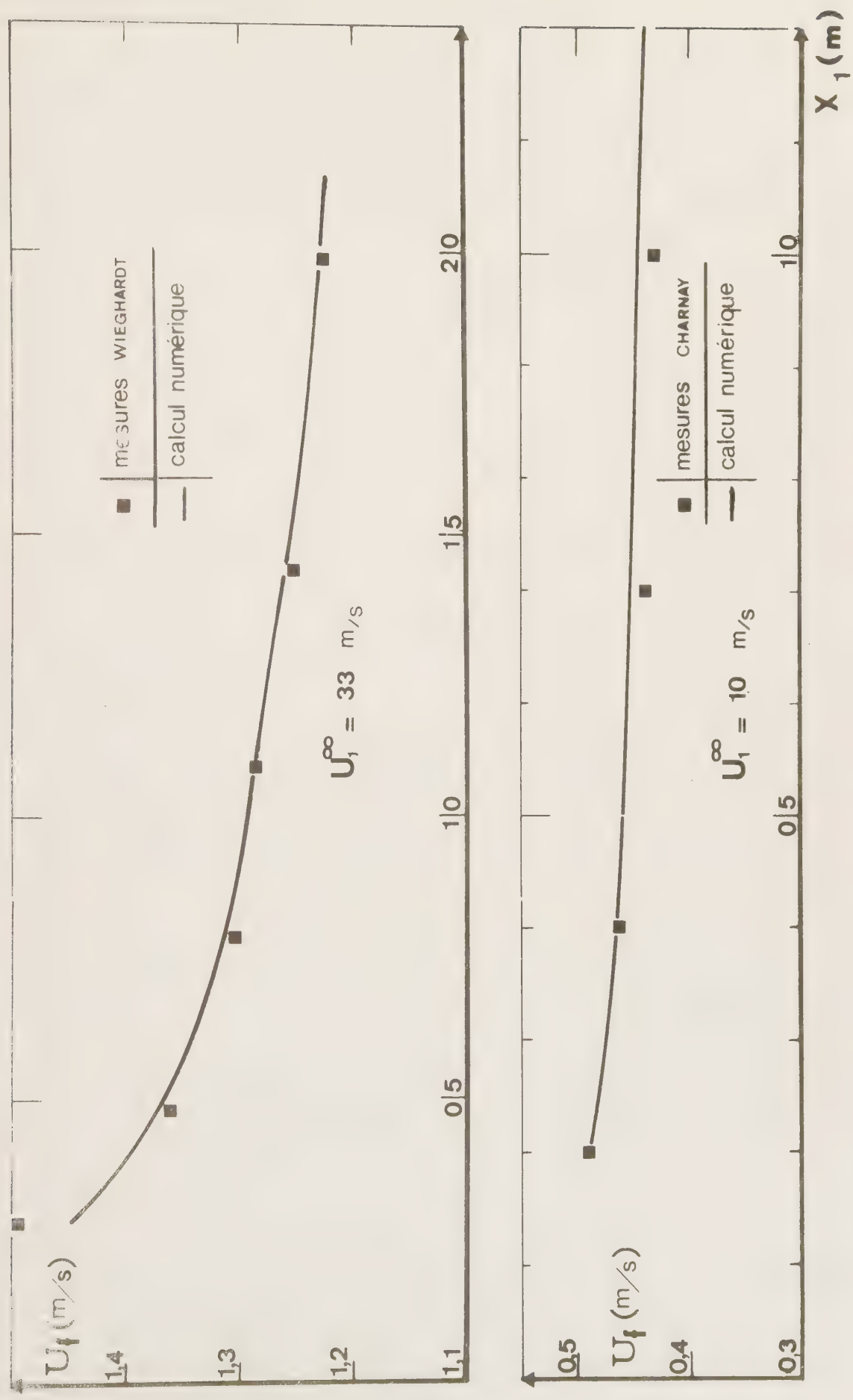
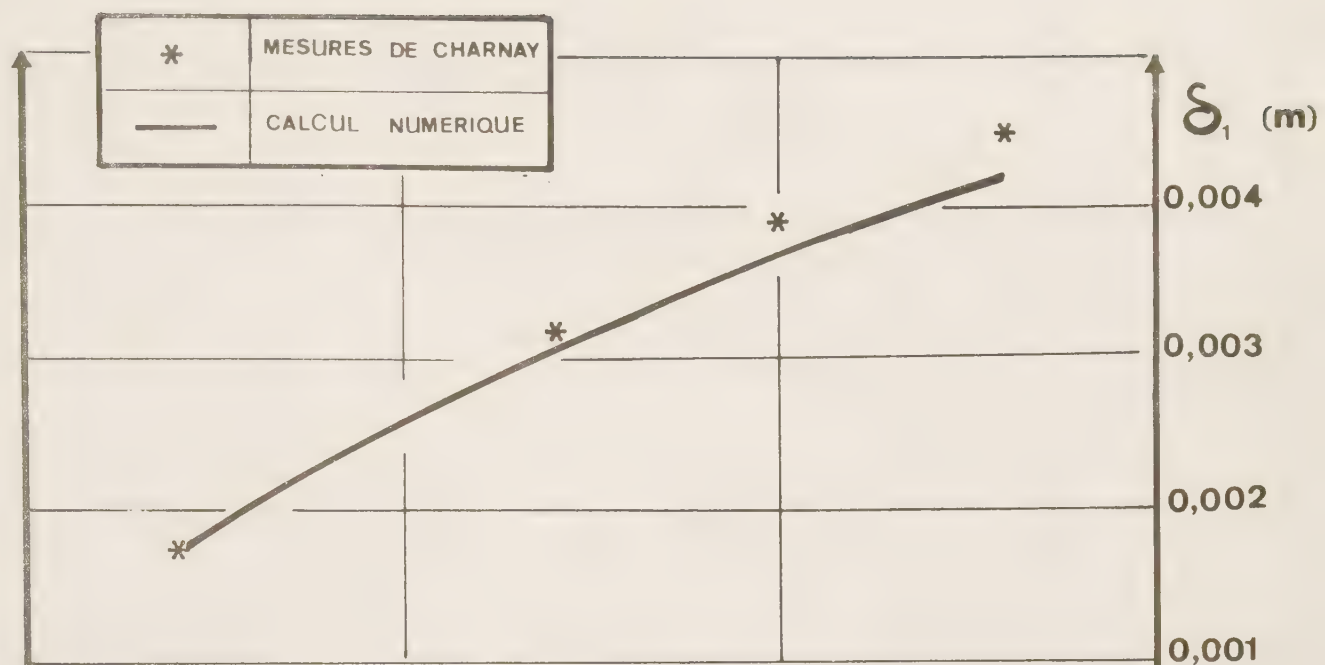


Fig. 29 Evolution longitudinale de la vitesse de frottement sur paroi plane ($dP/dX_1 = 0$)
Variation de U_f en fonction de la vitesse extérieure U_1^∞ .

FIG. A



$$U_1^\infty = 10 \text{ m/s}$$

FIG. B

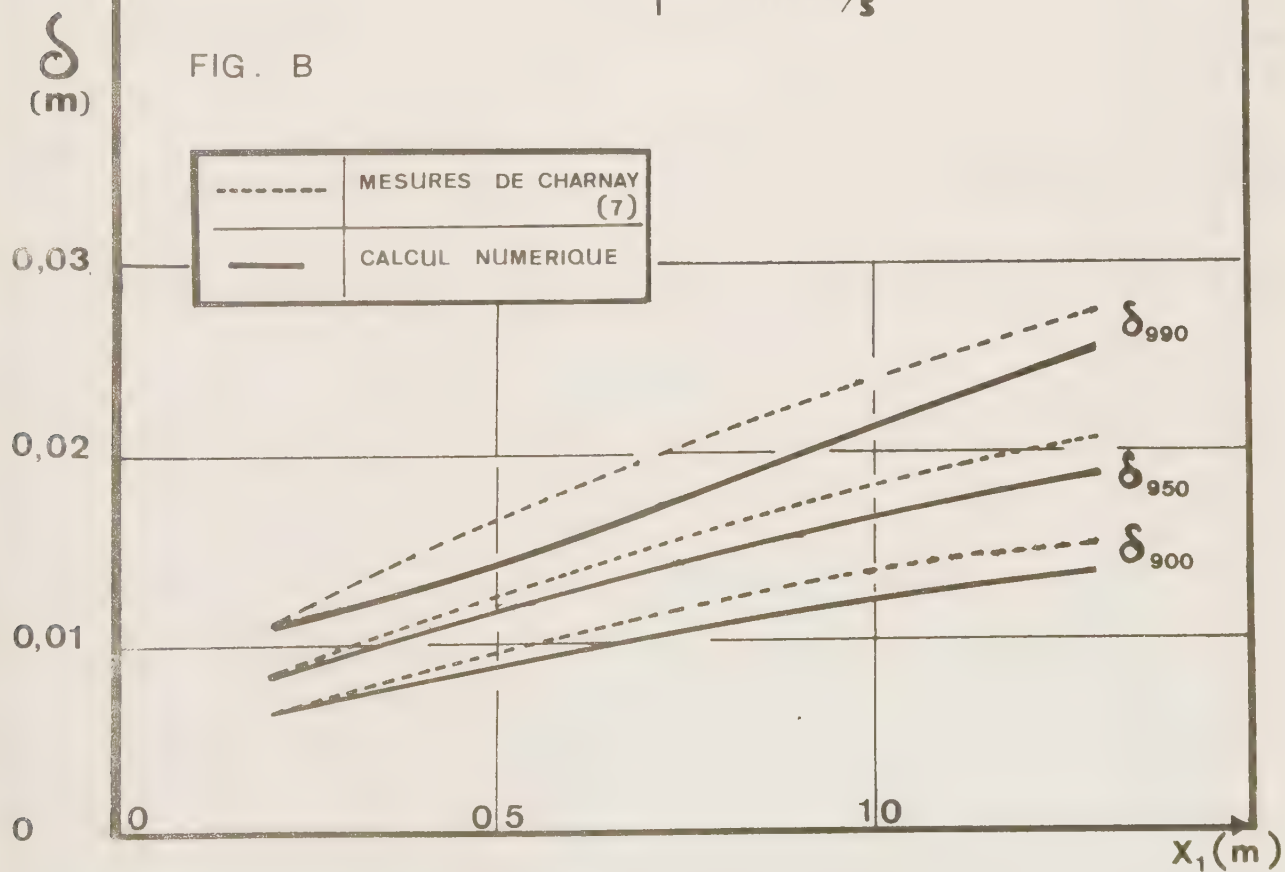


Fig. 30 A Evolution de l'épaisseur de déplacement

Fig. 30 B Représentation des lignes équivitesses à l'intérieur de la couche limite.

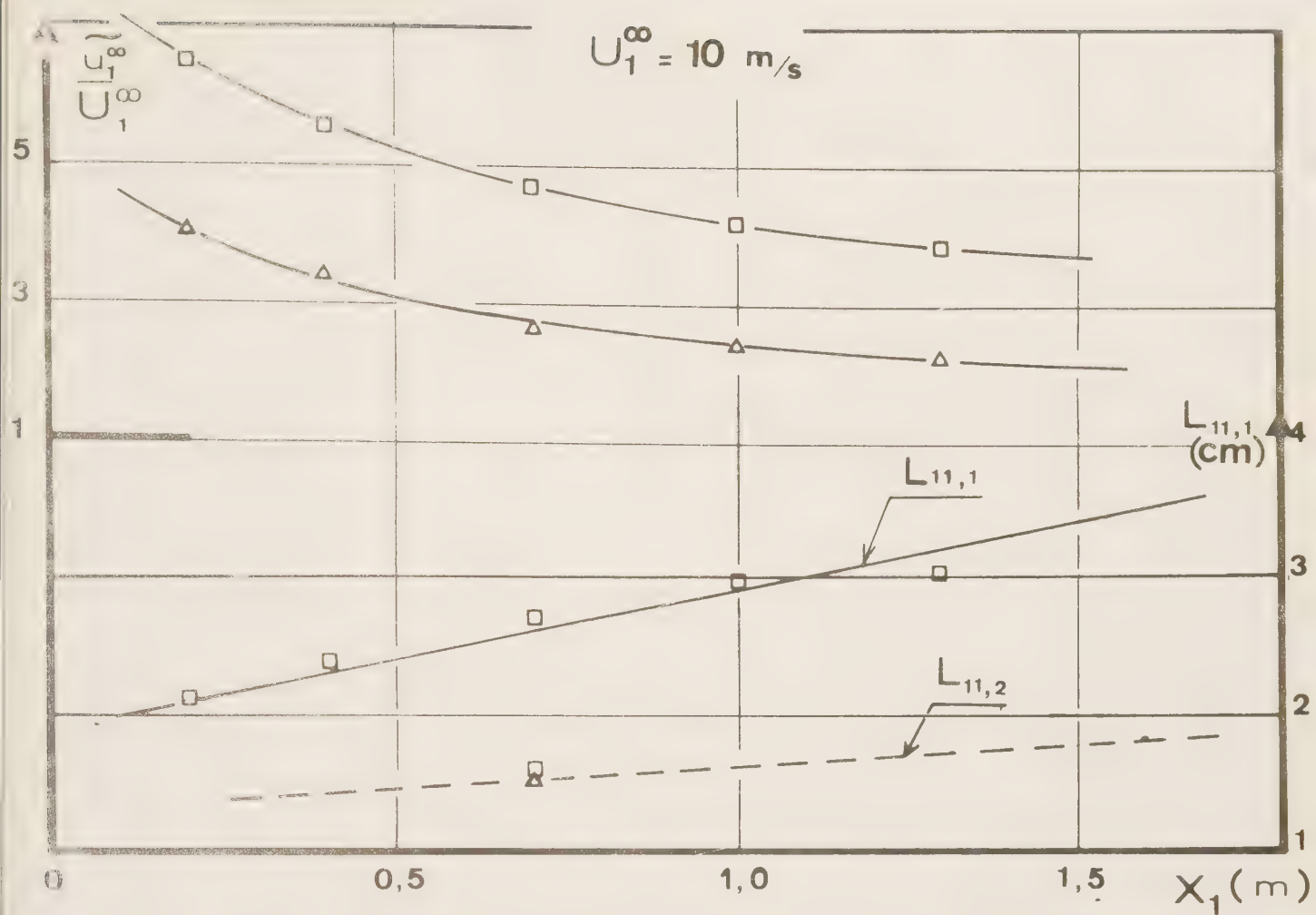


Fig. 31 A Niveaux de turbulence et échelles intégrales de longueur générés par grille à l'amont de la veine d'essais de la soufflerie de G. CHARNAY.

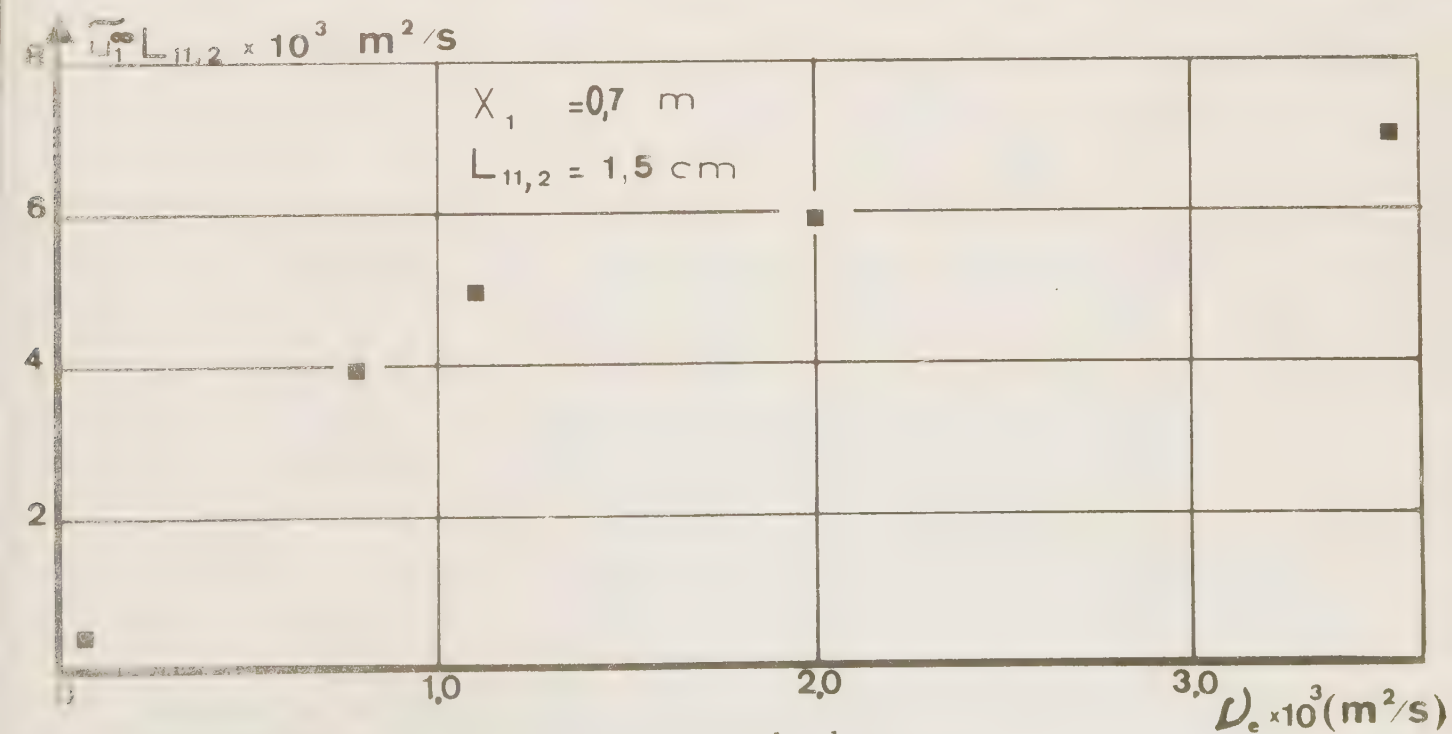


Fig. 31 B Influence du taux de turbulence du champ extérieur sur la viscosité turbulente à la frontière de la couche limite.

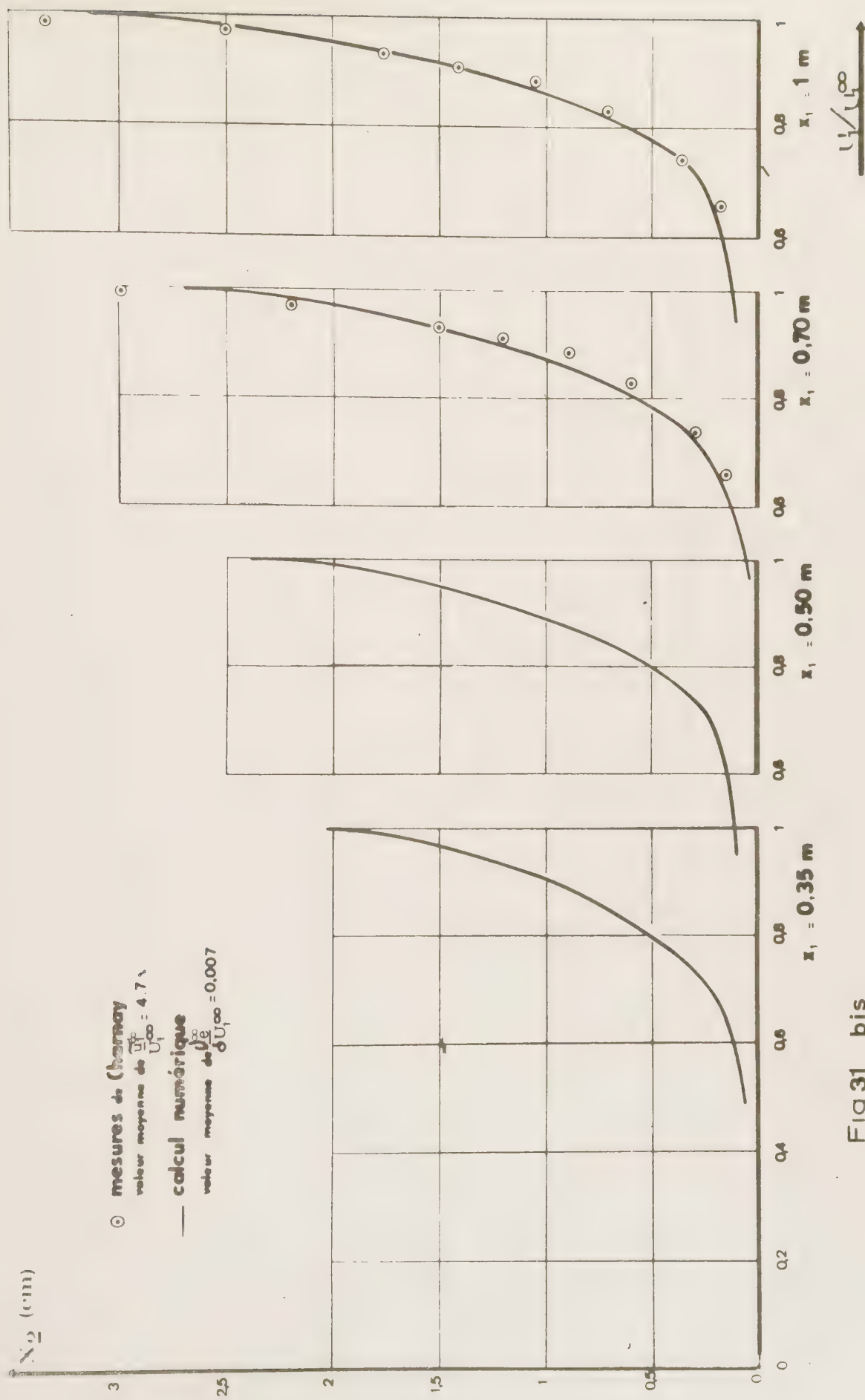


Fig.31 bis



Fig 32

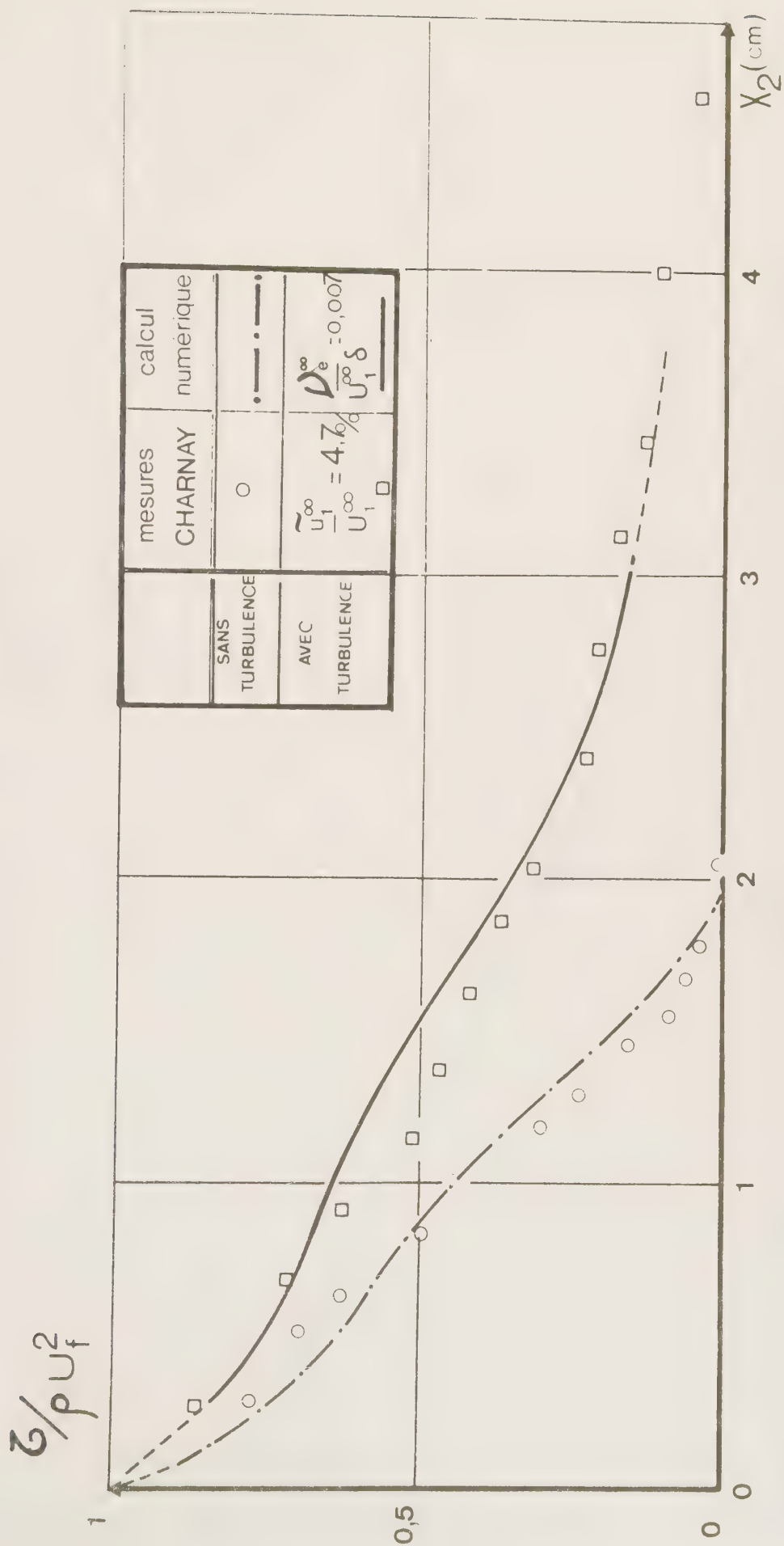


Fig 33

	MESURES DE CHARNAY	CALCUL NUMERIQUE
	$\bar{u}_1^\infty / U_1^\infty$	$\nu_e^\infty / U_1^\infty \delta$
SANS TURBULENCE	0,3 %	0,0003
AVEC TURBULENCE	4,7 %	0,007

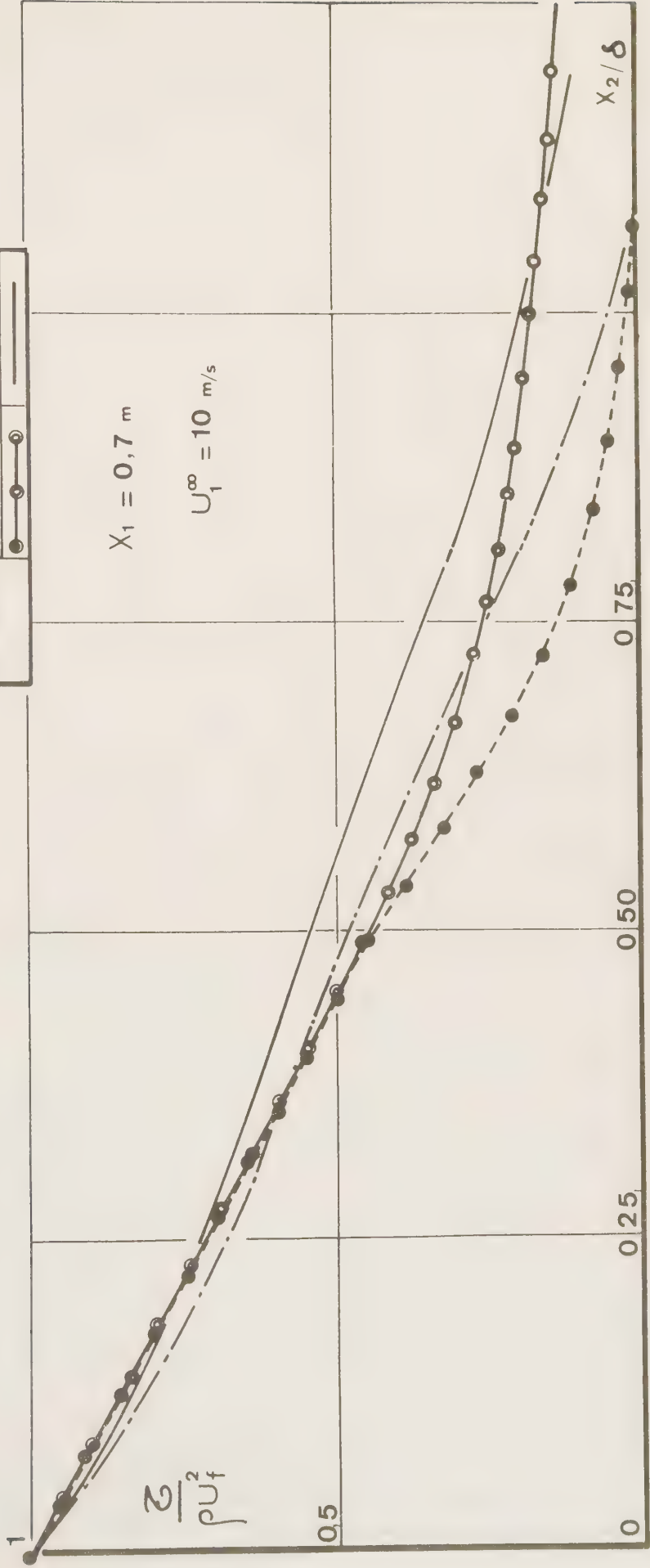


Fig. 34 Profils des contraintes tangentielles pour les deux niveaux de turbulence cités.

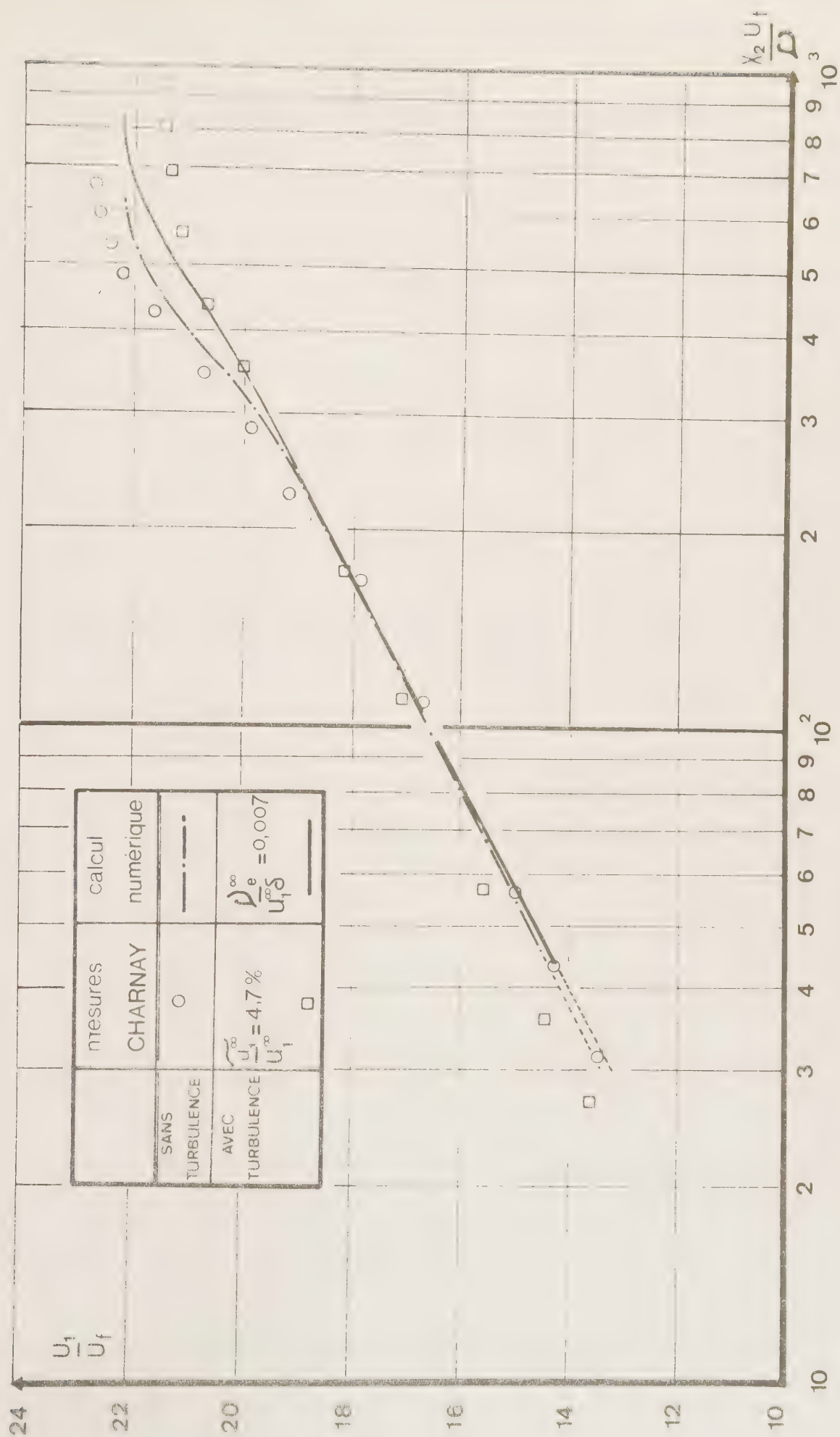


Fig 35,

$$\frac{\nu_e^\infty}{\nu_i^\infty} \approx 0 : \frac{\tilde{\nu}_i^\infty}{\nu_i^\infty} = 0.3\%$$

$$\frac{\nu_e^\infty}{\nu_i^\infty} \approx 0.007 : \frac{\tilde{\nu}_i^\infty}{\nu_i^\infty} = 4.7\%$$

CONVECTION	PRODUCTION	DIFFUSION	DISSIPATION
---	---	---	---

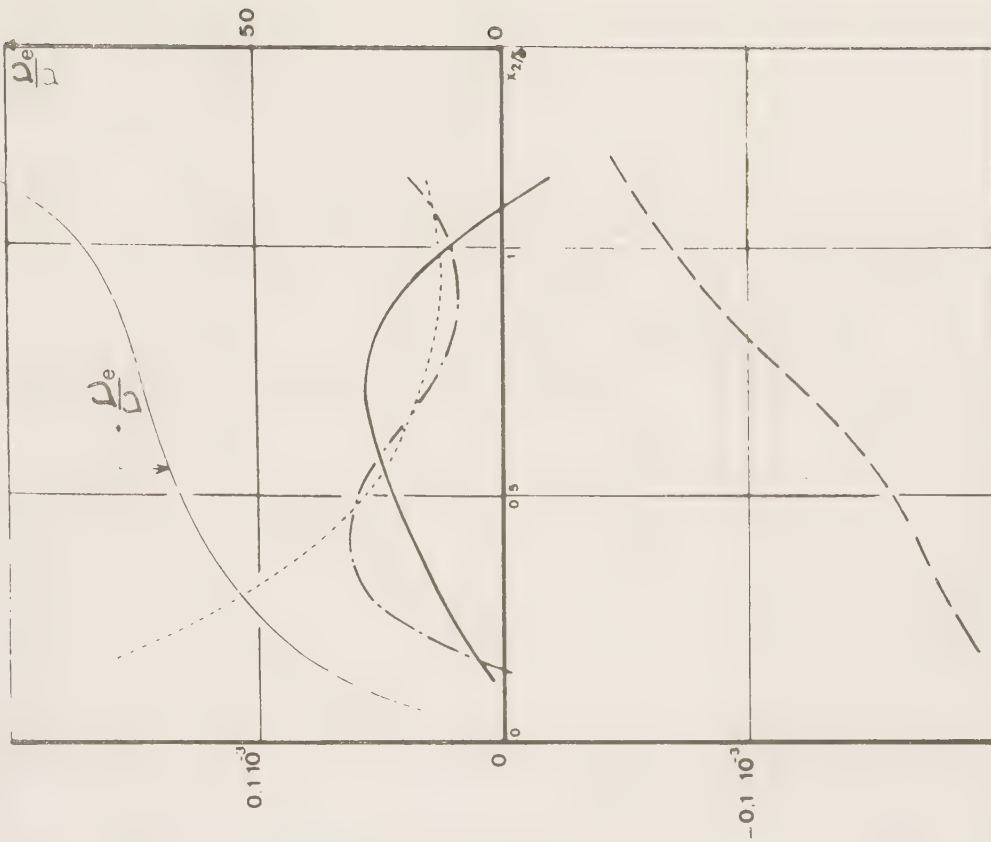
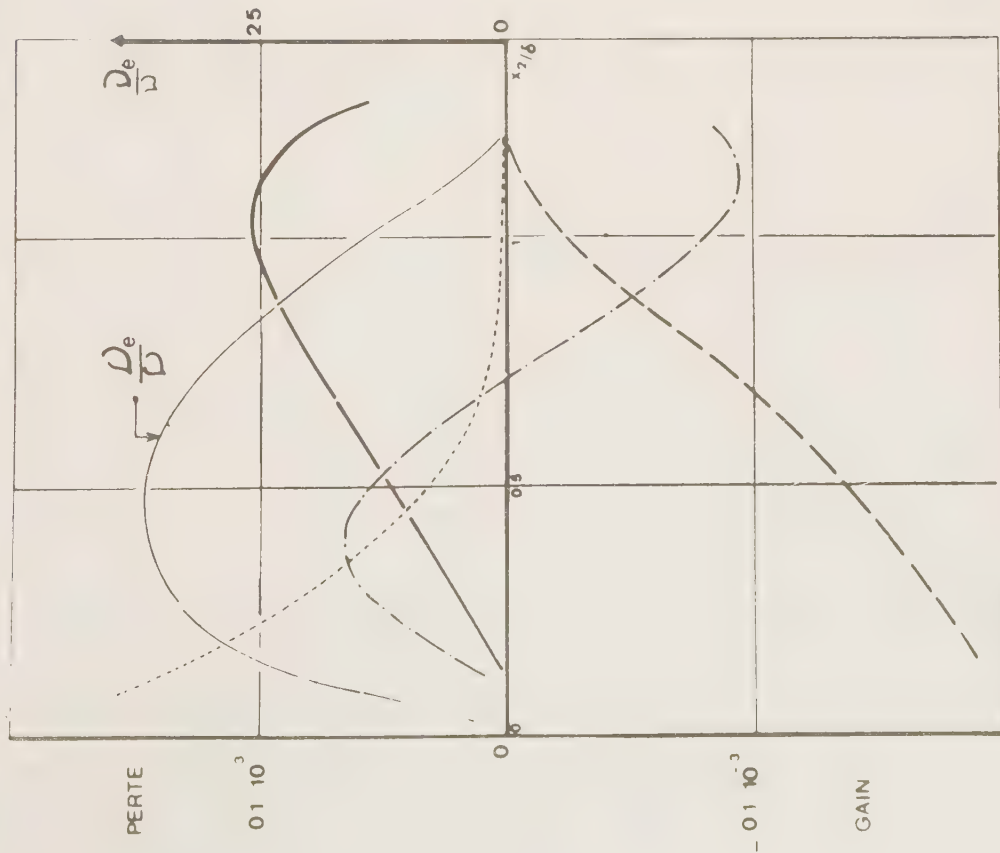


Fig 36

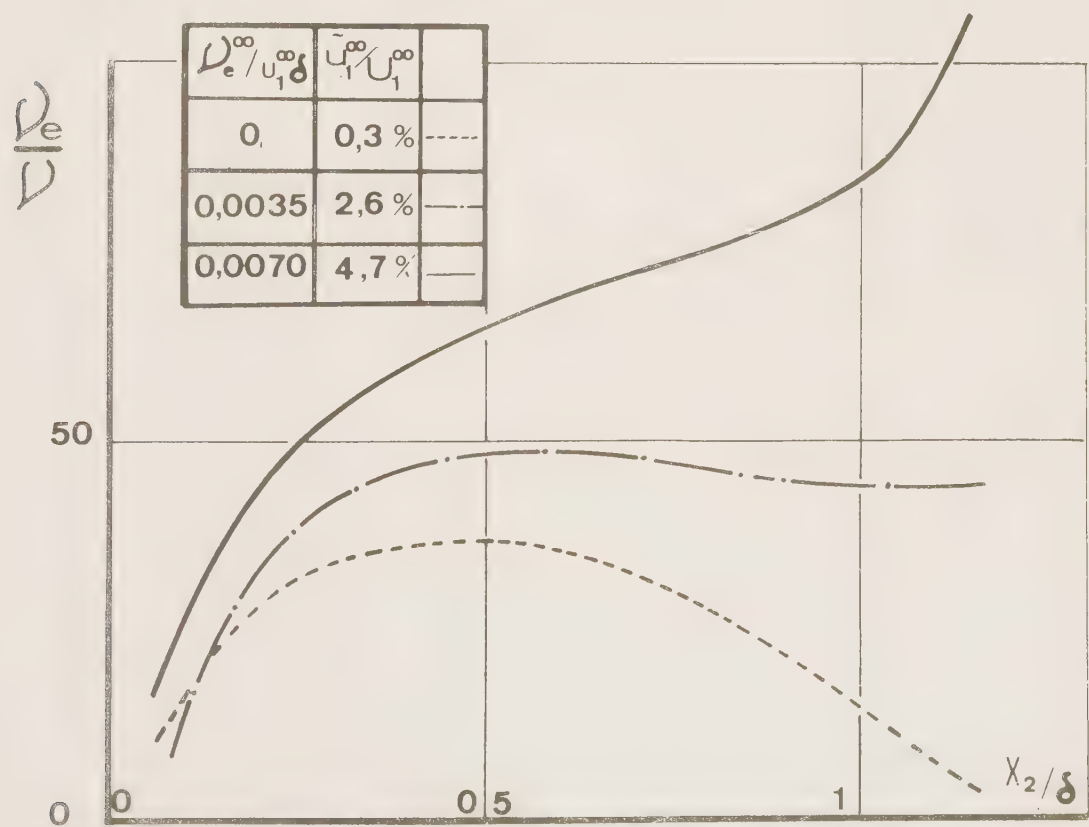
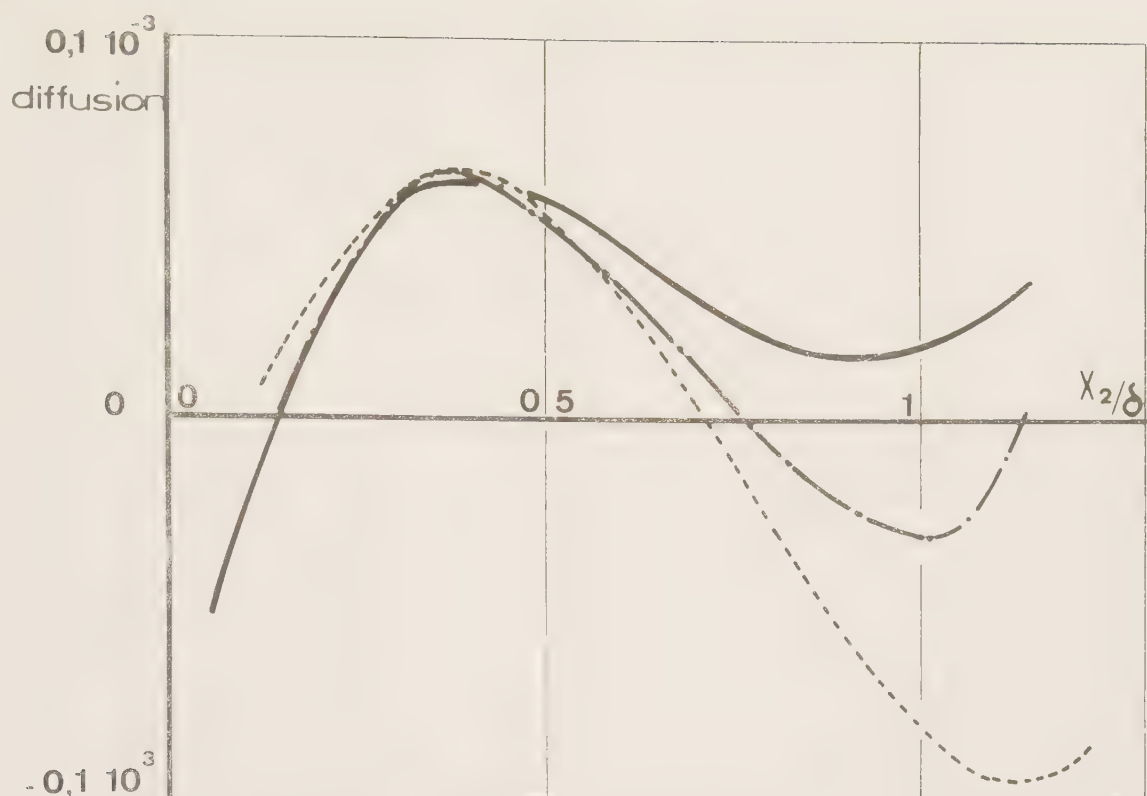


Fig. 37 Allure de la diffusion "au sens" de ν_e pour les différents niveaux de turbulence mentionnés.
 Profils de viscosité correspondants.
 $X_1 = 0,7 \text{ m}$ $U_1^\infty = 10 \text{ m/s}$

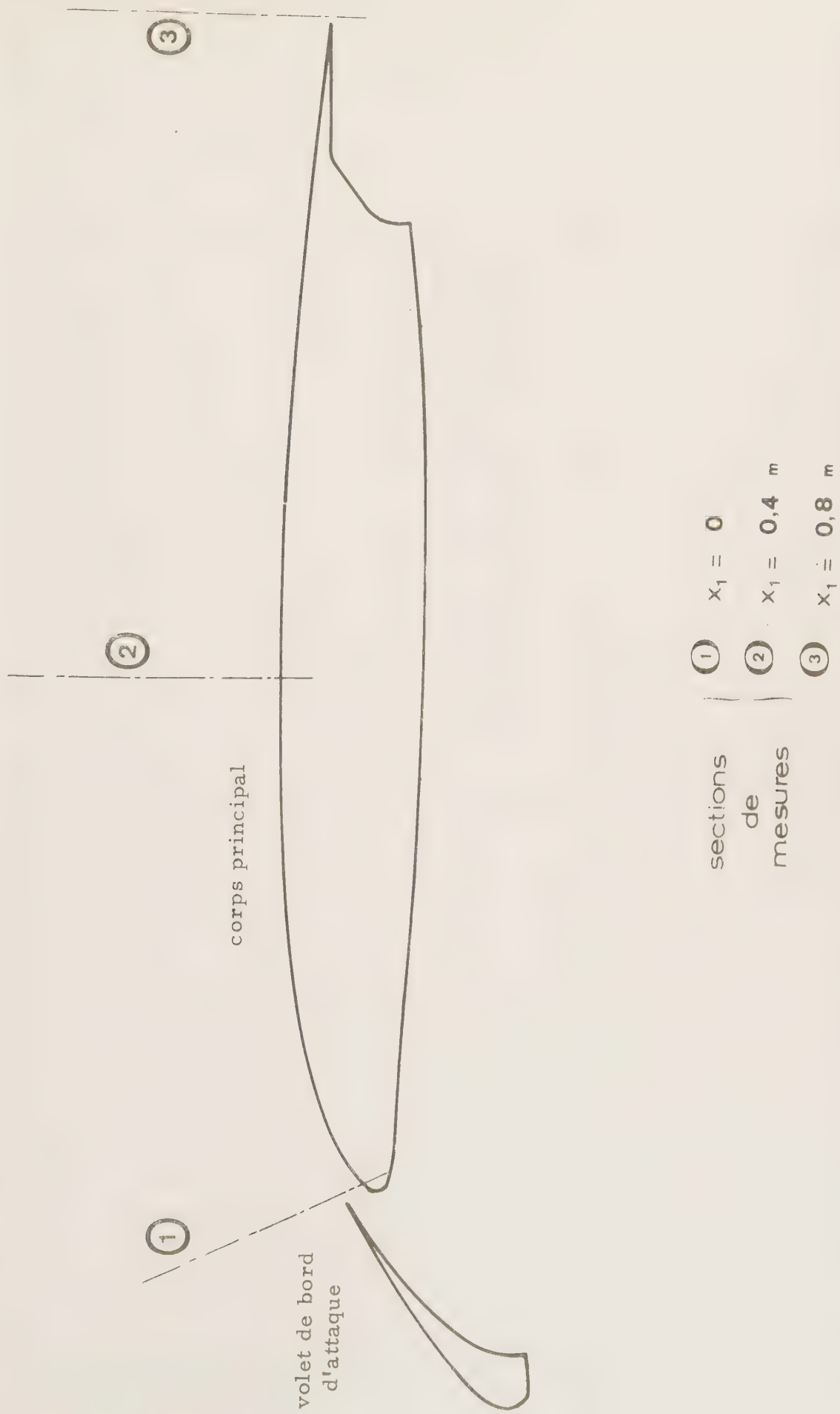


Fig. 38 Profil de la voiture et disposition des pitots ①, ②, ③.

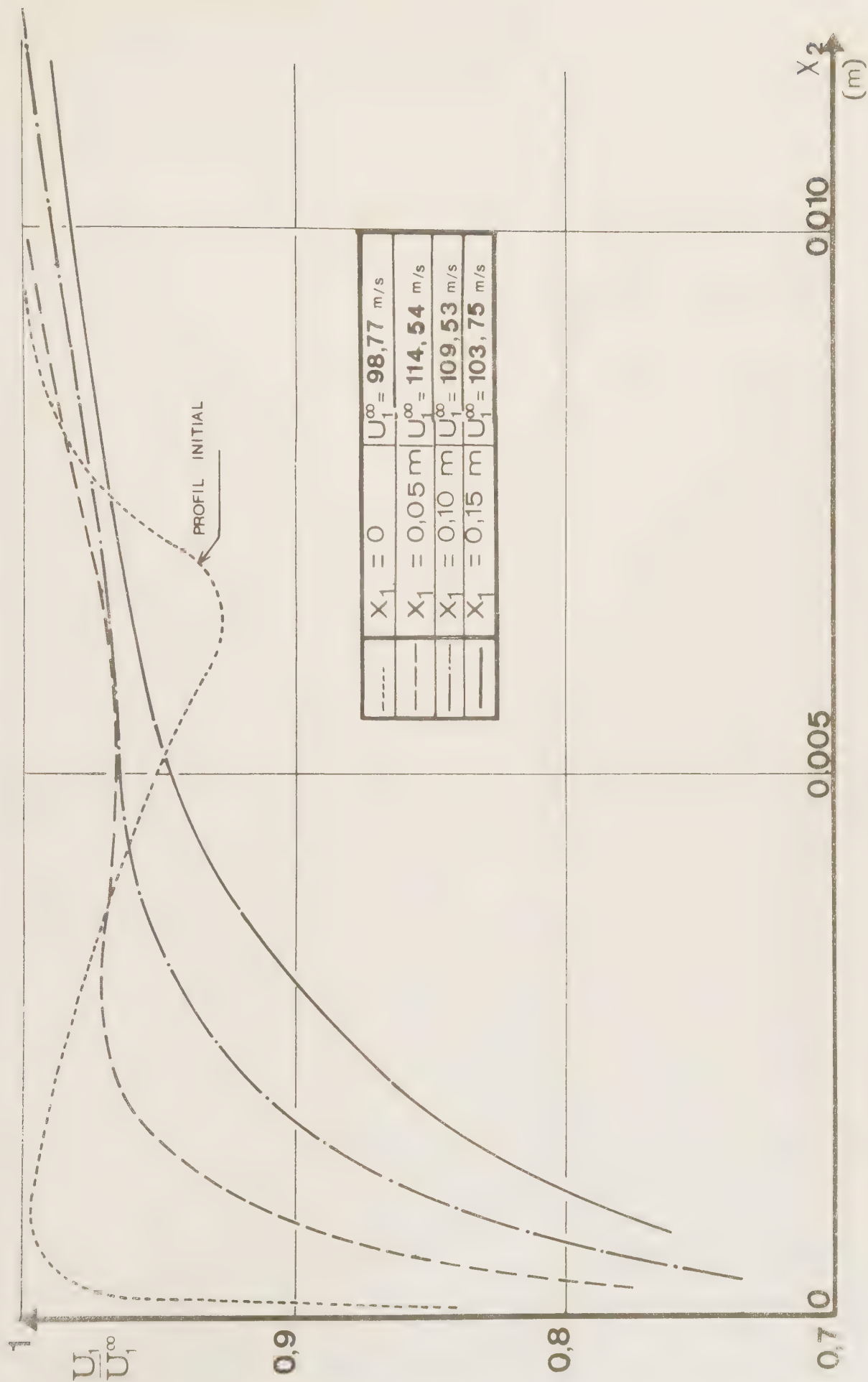


Fig. 39 Evolution dimensionnelle des profils de vitesse moyenne obtenue par le calcul pour différentes abscisses à partir de la section de départ ①.

----	$x_1 = 0$
- - - -	$x_1 = 0,05 \text{ m}$
- · - · -	$x_1 = 0,10 \text{ m}$
————	$x_1 = 0,15 \text{ m}$

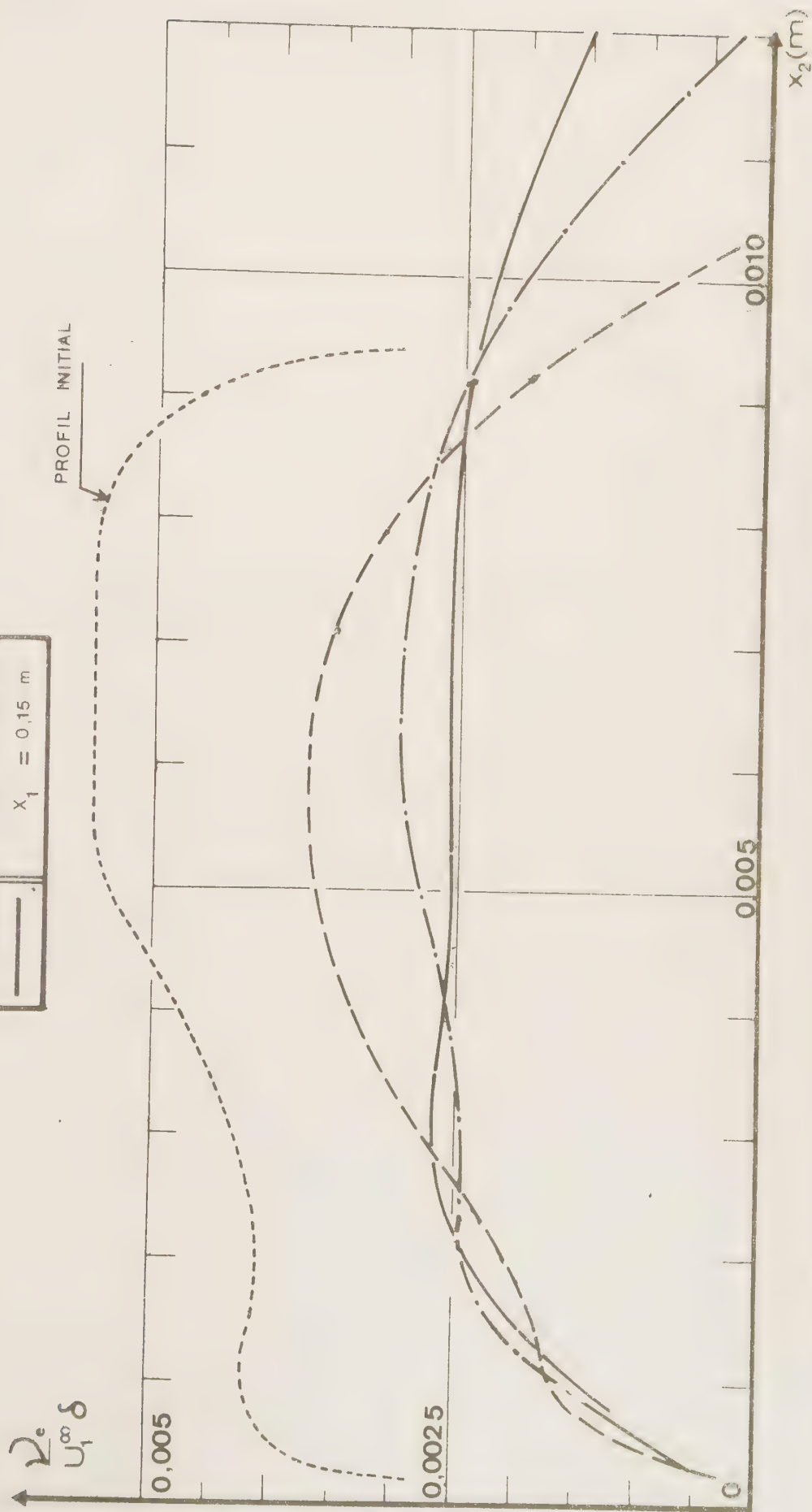


Fig. 40 Evolution dimensionnelle des profils de viscosité obtenus par le calcul pour différentes abscisses à partir de la section de départ ①

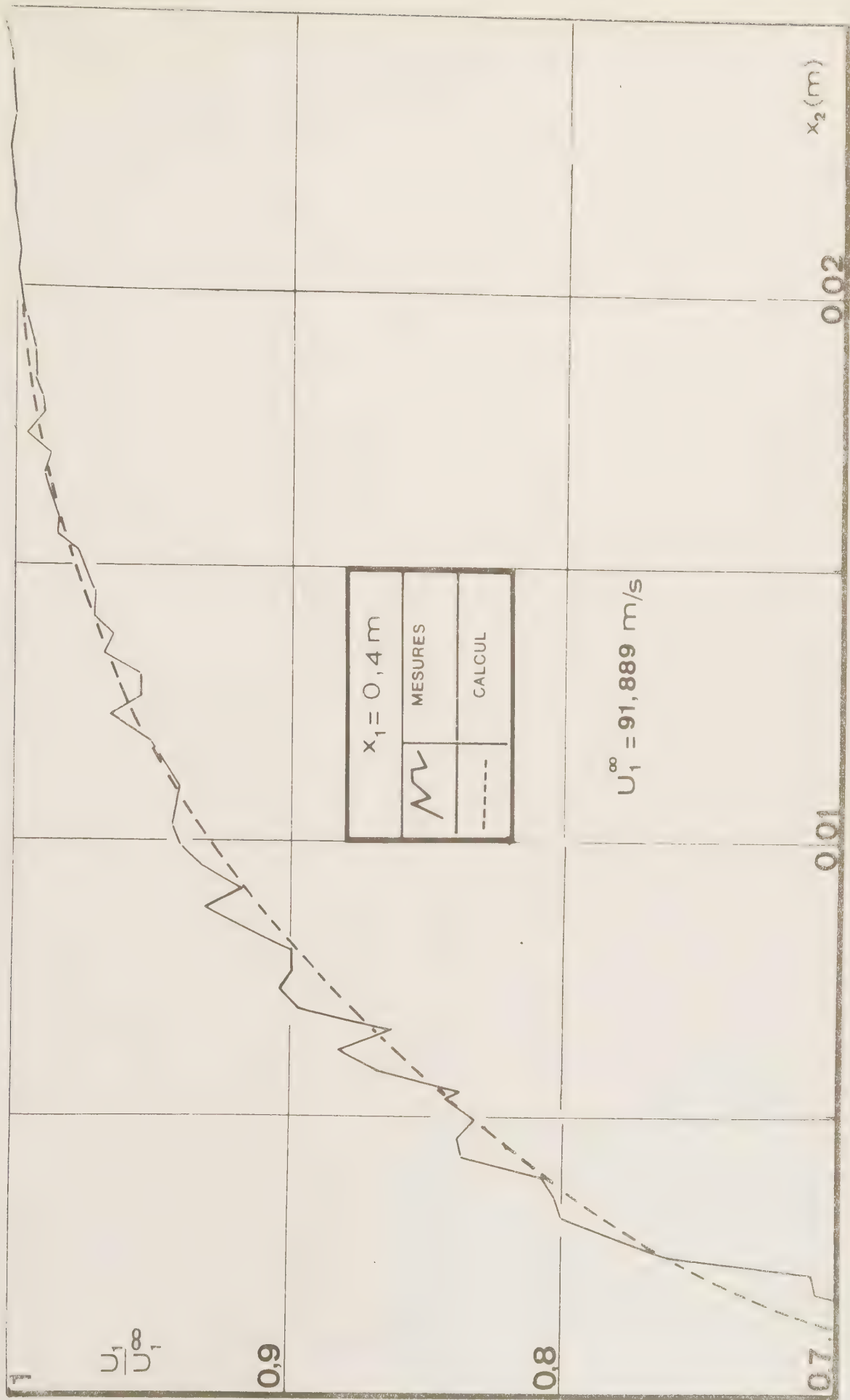


Fig. 41 Profil dimensionnel de vitesse calculé à la section (2) - Confrontation avec les mesures en soufflerie.

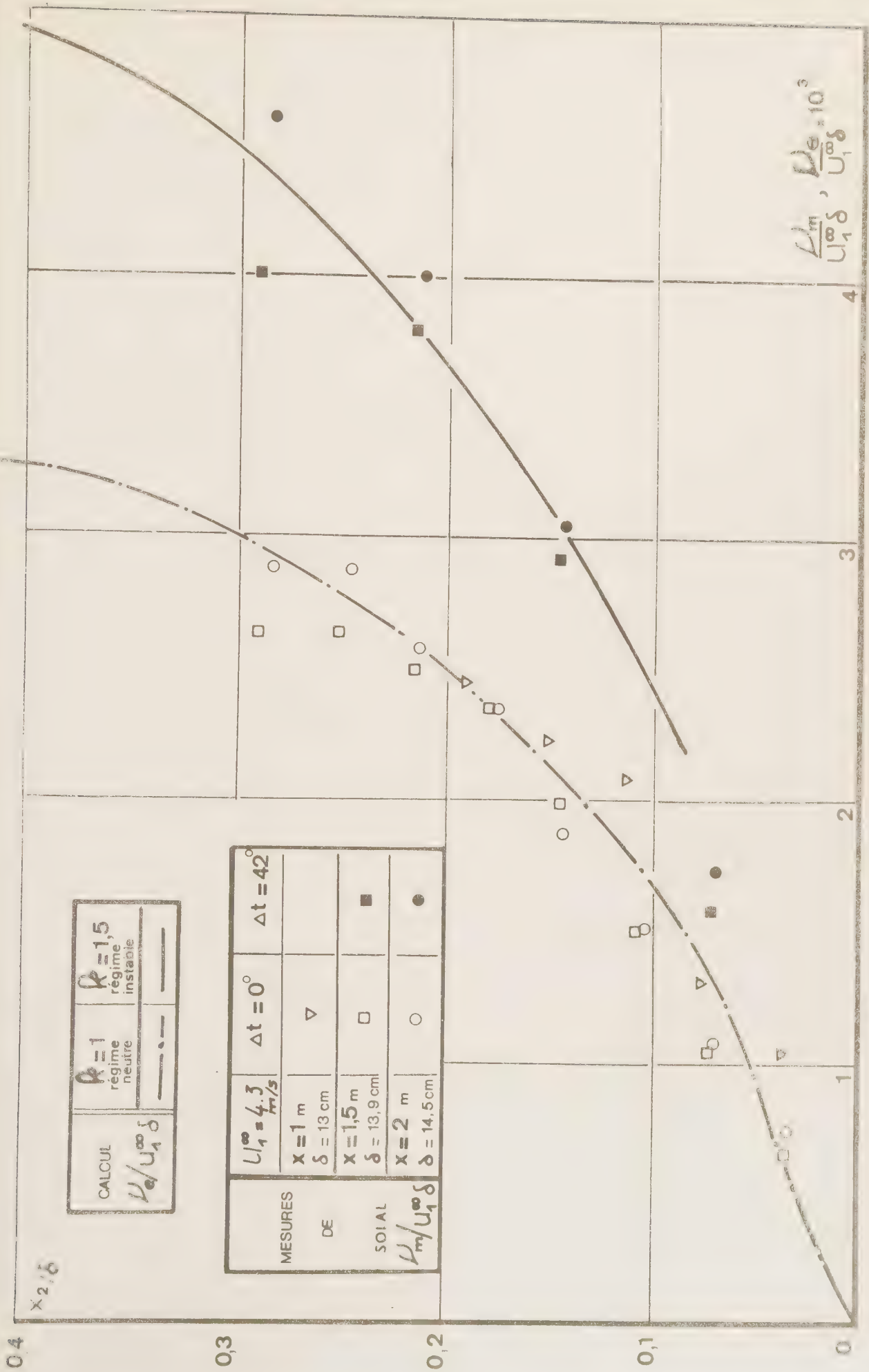


Fig. 42 Coefficients de diffusivité calculée ($\nu_e / U_1^\infty \delta$) et mesurés ($\nu_m / U_1^\infty \delta$) en régime neutre ($\delta \rightarrow \infty$) et instable ($\delta = 0.4 \text{ m}$).

Vu.

Les membres du jury :

[Signature]
[Signature]

Ch. B. Eichlmann

[Signature]

[Signature]
Ch. Schen

Vu et approuvé.

Le Directeur de l'U.E.R.
de

[Signature]

Vu et accordé le permis d'imprimer.

Lyon, le 27 juin 1971

Le Président de l'Université
Claude Bernard,

[Signature]
J. BOIDIN

